TD 38 Fonctions de deux variables réelles

Généralités

Exercice 38.1. Représenter dans le plan les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f : (x, y) \longmapsto x + y - 1$; **2.** $g : (x, y) \longmapsto \mathrm{e}^{y-x^2}$; **3.** $h : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

Indication 38.1. **1.** Vous pouvez exprimer y en fonction de x à partir de la relation $f(x, y) = k$.
2. Idem, mais pas pour toute valeur de k !
3. Vous pouvez interpréter géométriquement la relation $x^2 + y^2 = \cdots$ qu'il est possible d'obtenir.

Calculs de dérivées

Exercice 38.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + (x - y)\cos(x^2 + y^2).$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

1. Calculer ses dérivées partielles premières en tout point.

2. Déterminer une équation du plan tangent en $(0, 0, f(0, 0))$.

Indication 38.2. Rien de particulier, il faut essentiellement appliquer des formules du cours.

Exercice 38.3. Soit f et g deux fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Calculer les dérivées partielles par rapport à x et y des fonctions de deux variables :

1. $\gamma : (x, y) \longmapsto f(x)$; **2.** $\xi : (x, y) \longmapsto g(y)$; **3.** $\chi : (x, y) \longmapsto f(x) + g(y)$.

Indication 38.3. Rien de particulier, il faut appliquer les formules du cours.

Exercice 38.4. Calculer les dérivées partielles de la fonction f suivante en tout point.

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}.$$

Indication 38.4. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les dérivées partielles sont rapides obtenir. En $(0, 0)$, il faut utiliser des taux d'accroissements.

Exercice 38.5. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. On considère de plus les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(t, t^2) \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x + y, x - y) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(\exp(x) - y^2, y - 1) \end{array}$$

Calculer les dérivées premières de g, h et k en fonction de celles de f.

Indication 38.5. Une formule du cours donner presque immédiatement la réponse !

Points critiques et extrema

. . . .

Exercice 38.6. Déterminer les extrema locaux des fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ suivantes.

1. $f : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$;

2. $g : (x, y) \longmapsto (x - y)^2 + (x + y)^3$.

Indication 38.6. Il faut déjà chercher les points critiques en résolvant un système. Ensuite, il faut s'intéresse à chaque point critique.

1. Le point critique $(0, 0)$ n'est pas un extremum local (s'intéresser aux signes pour le démontrer). Le point critique $(1, 1)$ est un minimum local. Pour le démontrer, il faut étudier le signe de $f(1+t, 1+k) - f(1, 1)$ pour t, k proches de 0. Pour étudier un signe, on factorise si possible ☺
2. Mêmes idées.

. . . .

Exercice 38.7. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x\mathrm{e}^{x(y^2+1)} \end{array}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local. On notera A ce point.
3. **(a)** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) \geqslant x\mathrm{e}^x$.
   (b) En déduire que A est un extremum global de f sur $\mathbf{R}^2$.

Indication 38.7.

1. Ne pas trop s'attarder.
2. Il faut chercher les points critiques...
3. Pas trop difficile. Pensez à utiliser les questions précédentes pour conclure.

. . . .

Exercice 38.8.

1. On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) + 2x + 1 \end{array}$$

   Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \,]0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x(\ln(x) + x + y^2) \end{array}$$

   (a) Déterminer le seul point critique x_0 de f.
   (b) Montrer que $f(x_0) = -\alpha(\alpha + 1)$.

Indication 38.8.

1. Il faut utiliser un célèbre théorème.
2. **(a)** Il faut résoudre un système, comme toujours !
   (b) Pensez à utiliser la question **1.** : α vérifie une certaine relation.

. . . .

Exercice 38.9. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}_+^\star$ par :

$$\forall (x, y) \in \,]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[, \quad f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in \,]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy} \quad \text{et} \quad f(x) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
4. (a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$, pour tout $(x,y)\in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire que f admet sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
5. Démontrer que
$$\forall (x,y)\in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[,\quad 2\ln(x+y)-\ln(x)-\ln(y)\geqslant 2\ln(2).$$

Indication 38.9. 1. Facile : ces deux formes sont données pour la suite.
2. Rapide.
3. Méthode habituelle : une des formes de la question **1.** est plus simple pour dériver !
4. (a) Signe de la différence.
   (b) La question précédente est utile.
5. Si $g:(x,y)\longmapsto 2\ln(x+y)-\ln(x)-\ln(y)$, on peut exprimer $g(x,y)$ à l'aide de la fonction f. La question précédente permet alors de conclure.

Équation aux dérivées partielles

....

Exercice 38.10. On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :
$$(E):\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$$
d'inconnue la fonction f définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour cela, on posera le changement de variable
$$\begin{cases} u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\quad\text{c'est-à-dire}\quad\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$$

1. Soit f une fonction solution de (E). On considère la fonction
$$g:\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ (u,v)&\longrightarrow& f\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2}\right).\end{array}$$
   Ainsi, on peut écrire :
$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad f(x,y)=g(x+y,x-y).$$
   (a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g.
   (c) Démontrer que pour tout $(u,v)\in\mathbf{R}^2$, $2\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=g(u,v)$.
   (d) En déduire l'expression de g, puis l'expression de f.
2. Réciproquement, vérifier que toute fonction f de la forme obtenue à la question précédente est bien solution de (E) et conclure.

Indication 38.10. 1. (a) Rapide.
   (b) Une formule du cours donne directement la réponse.
   (c) Il faut utiliser la question précédente et le changement de variable donné.
   (d) g vérifie une équation linéaire du premier ordre : une fois résolue, on peut en déduire f.
2. Un peu calculatoire mais pas très difficile.