

TD 37

ESPACES PRÉHILBERTIENS
RÉELS

Produit scalaire, norme

Exercice 37.1. Dans chacun des cas suivants, décider si l'application φ introduite est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E :

1. $E = \mathbf{R}_2[X]$ et pour tous $P, Q \in E$,

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

2. $E = \mathbf{R}_n[X]$, $x_0, \dots, x_n$ sont des nombres réels deux à deux distincts et pour tous $P, Q \in E$,

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k).$$

3. $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ et pour tous $f, g \in E$,

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (1-t)f(t)g(t) dt.$$

4. $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et pour tous $f, g \in E$,

$$\varphi(f, g) = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

Indication 37.1. 1. φ n'est pas un produit scalaire. Vous pouvez chercher un polynôme P non nul tel que $\varphi(P, P) = 0$ pour contredire la séparation.

2. φ est un produit scalaire, la démonstration n'est pas très difficile (l'application φ généralise un exercice d'application du cours).
3. φ est un produit scalaire. Seule la séparation est délicate. Si on considère $f \in E$ tel que $\varphi(f, f) = 0$, on obtient avec le cours d'intégration $(1-t)f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0; 1]$. Il faut un argument pour en déduire $f = 0$ sur $[0; 1]$ (a priori on n'obtient que $f = 0$ sur $[0; 1]$).
4. Idem. Pour $f \in E$ tel que $\varphi(f, f) = 0$, on obtient rapidement $f' = 0$ et $f(1) = 0$, mais il reste à en déduire que $f = 0$ (rapide).

Exercice 37.2. 1. Soit E un espace préhilbertien et f un endomorphisme de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\| \qquad (ii) \quad \forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

2. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E vérifiant pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Montrer que f est un automorphisme.

Indication 37.2. 1. Pour le sens (i) $\implies$ (ii), il faut utiliser plusieurs fois l'identité de polarisation. L'autre sens est plus simple.

2. L'injectivité suffit (pourquoi?) donc vous savez quoi faire.

Exercice 37.3. Soit E un espace préhilbertien.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Pourquoi cette égalité est-elle appelée identité du parallélogramme?

2. En déduire que pour tous $x, y, z \in E$,

$$\|x - z\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2).$$

3. Soit $x, y \in E$. Montrer que

$$\|x\| = \|y\| \iff (x + y) \perp (x - y) \qquad x \perp y \iff \|x + y\| = \|x - y\|$$

Quelles sont les interprétations géométriques de ces propriétés ?

Indication 37.3. 1. Identités remarquables. Pour l'interprétation géométrique, vous pouvez faire un dessin.

2. Vous pouvez appliquer l'identité de parallélogramme au couple $(x - y, y - z)$.

3. • Identité remarquable. Pour l'interprétation géométrique, cette équivalence assure qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si...
- Identités remarquables. Pour l'interprétation géométrique, cette équivalence assure qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si...

Exercice 37.4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

Indication 37.4. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 37.5. Soit $x_1, \dots, x_n$ n nombres réels strictement positifs tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

Examiner le cas d'égalité.

Indication 37.5. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'inégalité.

Vous pouvez montrer qu'il y a égalité si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = \frac{1}{n}$.

Exercice 37.6. Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\ln b - \ln a \leq \frac{b - a}{\sqrt{ab}}.$$

Indication 37.6. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Familles orthogonales, orthonormales

Exercice 37.7. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto 3xx' + xy' + yx' + yy'. \end{aligned}$$

Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}^2$ pour ce produit scalaire.

Indication 37.7. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Si on l'applique à la base canonique de $\mathbf{R}^2$, on obtient :

$$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2} \left(-\frac{1}{3}, 1 \right) \right).$$

Exercice 37.8. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 = (1, 1, 0), \quad e_2 = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad e_3 = (0, 1, 1).$$

Indication 37.8. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On obtient

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2), \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1) \right).$$

Exercice 37.9. On munit l'espace $\mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbf{R})$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Orthonormaliser dans cet espace préhilbertien la famille

$$(t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto \exp(-t)).$$

Indication 37.9. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Pensez bien à vérifier que la famille proposée est libre avant ! On obtient :

$$\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}, t \mapsto \frac{\sqrt{6}}{2}t, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-7e^{-2}}} \left(e^{-t} - \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3e^{-1}t \right) \right)$$

Exercice 37.10. Pour tous $A, B \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose $\langle A, B \rangle = \int_{-1}^1 A(x)B(x)(1+x^2) dx$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Construire une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Indication 37.10. 1. Tout est rapide, sauf peut-être la séparation. Vous pouvez chercher le nombre de racine de $A \in \mathbf{R}_n[X]$ si A est tel que $\langle A, A \rangle = 0$.

2. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (il faut une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$ au départ, quelle famille simple pourrait-on bien prendre ?). On peut obtenir :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{4}X, \frac{5\sqrt{21}}{2\sqrt{34}} \left(X^2 - \frac{2}{5} \right) \right).$$

Orthogonal d'une partie

Exercice 37.11. On considère $E = \mathbf{R}_2[X]$, muni de l'application définie par $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Prouver que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_1[X]$ et celui de $\text{Vect}(X)$ dans E muni de ce produit scalaire.

Indication 37.11. 1. Que peut-on dire d'un polynôme qui possède une infinité de racines ?

2. Si $P \in \mathbf{R}_2[X]$, alors $P \in \mathbf{R}_1[X]^\perp \iff \langle P, 1 \rangle = 0$ et ... ? Vous pouvez chercher une base de $\mathbf{R}_1[X]^\perp$.
Même approche pour $\text{Vect}(X)^\perp$.

Exercice 37.12. Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ du produit scalaire usuel. Introduisons le sous-espace vectoriel de E défini par

$$H = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}.$$

1. Soit $f \in H^\perp$. À l'aide de la fonction $g : t \mapsto tf(t)$, montrer que f est nulle.
2. En déduire $H^\perp$ et $H^{\perp\perp}$.

Indication 37.12. 1. Attention, il y a un argument pour bien justifier que $f(0) = 0$.

2. La question précédente donne $H^\perp$. On en déduit immédiatement $H^{\perp\perp}$.

Exercice 37.13. Soit E un espace préhilbertien. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

$$F^\perp \cap F = \{0\} \quad F \subset F^{\perp\perp} \quad F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp \quad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

Indication 37.13. C'est un exercice d'écriture. Pour montrer $A = B$ où A et B sont deux ensembles, on procède par double inclusion (on se donne un élément quelconque dans A et on montre qu'il appartient à B pour l'inclusion $A \subset B$). Pour montrer une implication, on commence par supposer l'assertion à gauche de l'implication vraie.

Exercice 37.14. On définit la trace d'une matrice carrée A , notée $\text{tr}(A)$, comme la somme des coefficients de sa diagonale principale. On définit l'application

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{tr}(A^T B)$$

1. Montrer l'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est linéaire et que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$.
2. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Prouver que f est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien et montrer que la base canonique en est une base orthonormale.
5. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\text{tr}(A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A).$$
6. Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Indication 37.14. 1. Si $A = (a_{i,i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. Il faut revenir à cette formule pour montrer la linéarité et la formule proposée.

2. Idem, en utilisant la formule donnant le produit matriciel (avec une somme).
3. Pour la bilinéarité et la symétrie, il faut utiliser les formules obtenues aux questions précédentes. Pour la définie positivité, il faut écrire $f(A, A)$ comme une somme pour ensuite conclure rapidement.
4. On sait déjà que c'est un espace préhilbertien ; que faut-il de plus pour que ce soit un espace euclidien ? Il faut utiliser des sommes pour montrer l'orthonormalité de la base canonique.
5. Quelle inégalité y a-t-il dans ce cours ?
6. Une méthode est proposée dans le cours, mais vous pouvez essayer de le faire autrement en commençant par

$$M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})^\perp \iff \forall i \leq j, \quad M \perp S^{(i,j)}$$

où pour tout $i \leq j$, $S^{(i,j)}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux d'indices (i, j) et (j, i) qui valent tous les deux 1 (alors la famille formée des $S^{(i,j)}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$).

Projection orthogonale

Exercice 37.15. On travaille dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On introduit l'espace vectoriel

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}.$$

On note p la projection orthogonale sur A .

1. Déterminer la matrice représentant p dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer la distance du vecteur $v = (-3, 1, 0, 2)$ à A .

Indication 37.15. 1. Pour commencer, il faut trouver une base de A . Ensuite, il y a deux méthodes dans le cours pour répondre à la question.

- *Méthode 1.* Vous pouvez orthonormaliser la base obtenue avant (si vous vous y êtes bien pris, la base obtenue avant est déjà orthogonale donc il ne reste plus beaucoup de calculs à faire) et ensuite utiliser la formule du cours qui donne l'expression du projeté dans une base orthonormale.
- *Méthode 2.* Utiliser que, pour $a \in \mathbf{R}^4$, alors $p(a)$ est le projeté orthogonal de a si et seulement si $p(a) \in A$ et $a - p(a) \in A^\perp$.

Vous pouvez essayer les deux méthodes pour vous entraîner. Une fois que vous connaissez $p(a)$ pour a quelconque, en déduire la matrice de p est rapide. Vous devez trouver :

$$M(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Une formule du cours donne directement la réponse, en utilisant la question 1..

Exercice 37.16. 1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y, z), (x', y', z')) &\longmapsto xx' + xy' + yx' + 2yy' + 2yz' + 2zy' + 5zz' \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

2. Notons P le plan d'équation $z = 0$. Déterminer l'expression de la projection orthogonale (relativement au produit scalaire f) de $\mathbf{R}^3$ sur P .

Indication 37.16. 1. Rien à signaler.

2. Il y a deux méthodes dans le cours. Vous pouvez essayer les deux pour vous entraîner, mais celle qui nécessite une base orthonormale me paraît plus pénible.

Exercice 37.17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une projection orthogonale ($\mathbf{R}^3$ est bien sûr muni du produit scalaire canonique) sur un plan P que l'on précisera.

Indication 37.17. Vous pouvez commencer par montrer que A est la matrice d'une projection et déterminer ses éléments caractéristiques $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ (cf. cours sur les applications linéaires). Ensuite, il reste à montrer que $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$.

Exercice 37.18. 1. Montrer que l'application $u : (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ munit $\mathbf{R}_2[X]$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

3. En déduire

$$\min \left(\left\{ \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt : a, b \in \mathbf{R} \right\} \right).$$

Indication 37.18. 1. Rien à signaler.

2. Vous devez savoir quoi faire !

3. Vous pouvez interpréter ce minimum comme une distance entre un vecteur et un sous-espace vectoriel. Le cours contient alors une formule qui donne la réponse.

Exercice 37.19. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques sur $\mathbf{R}$. Pour tout $f, g \in E$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

On admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

1. Justifier que pour $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$.
2. Rappeler les formules donnant la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.
3. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on définit les fonctions f_k et g_k par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_k(x) = \cos(kx) \text{ et } g_k(x) = \sin(kx)$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est orthonormale.

4. Que peut-on dire de la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$?
5. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\cos$ et $f: x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u = \sin^2$.

Indication 37.19. 1. Il faut utiliser la périodicité des fonctions.

2. Rien à signaler.
3. Il faut calculer des intégrales de produits. Les formules de 2. sont (évidemment !) utiles.
4. La famille est orthogonale mais pas orthonormale.
5. Il y a deux méthodes dans le cours.

Exercice 37.20. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme f de E est autoadjoint si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

1. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E .
 - (a) Montrer que la matrice représentant f dans une base orthonormale de E est une matrice symétrique.
 - (b) Montrer que $\text{Im}(f)$ est l'orthogonal de $\text{Ker}(f)$.
2. Soit p un endomorphisme de E . Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $p^2 = p$ et p est autoadjoint.

Indication 37.20. 1. (a) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , il faut montrer que $f(e_i)_j = f(e_j)_i$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Vous pouvez commencer par remarquer que $f(e_i)_j = \langle f(e_i), e_j \rangle$.

(b) Vous pouvez montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)^\perp$ et utiliser un argument de dimension pour conclure.

2. • Pour le sens direct, pour $(x, y) \in E^2$, il faut montrer que $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$. Vous pouvez commencer par écrire

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), y - p(y) + p(y) \rangle$$

À quel ensemble appartient $y - p(y)$? Que peut-on en déduire sur $\langle p(x), y - p(y) \rangle$? Pour avancer encore, il faut utiliser la même astuce et remplacer $p(x)$ par $p(x) - x + x$.

- Pour le sens réciproque, on a $p^2 = p$, donc on obtient directement que p est un projecteur et ses sous-espaces caractéristiques (cf. cours sur les applications linéaires). Il reste à voir que les sous-espaces caractéristiques sont orthogonaux, ce qui est plutôt rapide.