

TD 36

INTÉGRATION SUR UN
SEGMENT

Généralités

.....

Exercice 36.1. Sans les calculer, comparer les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx.$$

Indication 36.1. Rien à signaler.

.....

Exercice 36.2. Donner un exemple de fonction en escalier positive sur $[0; 1]$, non nulle, et dont l'intégrale sur $[0; 1]$ est nulle.

Indication 36.2. Une fonction constante sur un intervalle privé d'un point est une fonction en escaliers.

.....

Exercice 36.3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$. Montrer que $P = 0$.

Indication 36.3. Vous pouvez commencer par montrer que P possède une infinité de racines.

.....

Exercice 36.4. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Indication 36.4. Attention, les inégalités sont strictes.

.....

Exercice 36.5. On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R})$ telles que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

1. Soit $f \in E$. Calculer

$$\int_0^1 (f - f^2)^2.$$

2. Conclure.

Indication 36.5. 1. Penser à bien simplifier.

2. Vous pouvez faire une analyse/synthèse (toujours bien adaptée pour les problèmes dans lesquels on recherche des fonctions). Pour l'analyse, la question précédente est utile : il y a uniquement deux fonctions qui répondent à la question.

.....

Exercice 36.6. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$ si, et seulement si, $f \geq 0$ ou $f \leq 0$.

Indication 36.6. Pour tout $X \in \mathbf{R}$ et $a \geq 0$, $|X| = a \iff \dots$.

Exercice 36.7. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Indication 36.7. Il faut une utiliser une formule de Taylor (mais laquelle?).

Exercice 36.8. Montrer que pour tout nombre réel x ,

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ et } \cos(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Indication 36.8. Il faut une utiliser une formule de Taylor (mais laquelle?).

Exercice 36.9. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$.

Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$.

Indication 36.9. Ça sent la formule de Taylor ! Mais laquelle ?

La limite est $f''(a)$.

Suites ou fonctions définies avec des intégrales

Exercice 36.10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x) dx$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq c^n$ où $c \in [0; 1[$ est une constante à déterminer. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Indication 36.10. 1. A quel ensemble appartient $\sin(x)$?

2. Pas besoin de calculer l'intégrale ici.

Exercice 36.11. 1. Montrer que pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est définie sur $\mathbf{R}^*$.

3. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{4}]$. Encadrer l'expression $\frac{\cos(t)}{t}$ pour tout $t \in [x; 2x]$ et en déduire un encadrement de $f(x)$.

4. Prouver que f admet une limite finie à droite en 0 que l'on déterminera.

5. Que peut-on dire concernant la limite à gauche en 0 de f ?

Indication 36.11. 1. Le plus rapide est d'utiliser une formule de Taylor.

2. Vous pouvez montrer que le domaine de définition est $\mathbf{R}^*$ par double inclusion.

3. Il faut utiliser une question précédente.

4. Quel théorème pourrait-on bien utiliser avec l'encadrement obtenu avant ?

5. Un argument de parité permet d'obtenir rapidement la limite à gauche.

Exercice 36.12. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_a^b g(t) \cos(nt) dt$ est une suite bornée.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ converge vers 0. On pourra utiliser la question précédente après avoir fait une intégration par parties.

Indication 36.12. 1. Rien à signaler.

2. Vous pouvez faire une IPP pour montrer que

$$|I_n| \leq \frac{1}{n}(|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt.$$

et conclure ensuite rapidement.

Exercice 36.13. Déterminer le domaine de définition et donner un équivalent simple en $+\infty$ de

$$F : x \mapsto \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt.$$

Indication 36.13. Vous pouvez procéder par double inclusion pour montrer que le domaine de définition est $[-1; +\infty[$. Pour déterminer un équivalent, vous pouvez commencer par encadrer $\sqrt{1+t^3}$ pour $t \in [x; x+1]$ (où $x \geq 1$ est fixé).

Exercice 36.14. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

1. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbf{R}_+$
2. Montrer que f est dérivable et exprimer f' .
3. En étudiant les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction

$$\varphi : x \mapsto 2xe^{x^2-x^4} - 1,$$

dresser le tableau des variations de f . On placera en particulier le point d'abscisse 1 dans ce tableau.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Indication 36.14. 1. Attention à ne pas aller trop vite : il faut que les bornes soient « dans le bon ordre » pour appliquer le théorème de positivité de l'intégrale. Vous pouvez distinguer des cas suivant que $x \geq 1$ et $x \in [0; 1]$.

2. Rien à signaler, la « formule » est dans le cours.
3. Vous avez l'expression de la dérivée, vous savez donc quoi faire pour obtenir les variations. Vous pouvez nommer β et γ les abscisses où un changement de variation se produit sans chercher à obtenir les valeurs de ces nombres.
4. Vous pouvez commencer par établir un encadrement.

Exercice 36.15. On pose pour tout réel x non nul, $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. Vérifier que f est effectivement définie sur $]0, +\infty[$.
2. Vérifier que f est paire.
3. Vérifier que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. (a) Rechercher la limite éventuelle de f en $+\infty$.
(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{x^2 + t^2} dt$. En déduire la limite éventuelle de f à droite en 0.
5. Donner l'allure de la représentation graphique de f .

Indication 36.15. 1. Comment justifier qu'une intégrale existe ?

2. Là, je pense que vous avez pas besoin d'indication.
 3. On peut y aller "à la main", c'est à dire prendre $0 < x < y$ et montrer que $f(x) \geq f(y)$.
 4. (a) Essayer de comprendre ce qu'il va se passer "a priori". Ensuite, il faut majorer!
(b) Etudier $g : t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(t) - t$. Puis minorer.
 5. On a tout dit, y a plus qu'à dessiner.
-

Exercice 36.16. Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction F ainsi définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est dérivable et déterminer F' . En déduire une expression plus simple de F .
2. Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Indication 36.16. Vous devez obtenir que $F = 0$.

.....

Exercice 36.17. Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

1. Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer g' . On pourra utiliser la formule d'addition du sinus.
2. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, puis vérifier que

$$g'' + g = f.$$

3. En déduire l'ensemble des fonctions numériques solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = f.$$

Indication 36.17. 1. Vous devez obtenir $g'(x) = \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt$.

2. Il faut dériver l'expression obtenue avant pour obtenir g'' .
 3. Rien à signaler.
-

Exercice 36.18. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

1. Calculer J_1 .
2. Déterminer la limite de (J_n) .
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
5. Donner un équivalent de (I_n) .

Indication 36.18. 1. Rien à signaler.

2. Vous pouvez commencer par encadrer J_n pour $n \in \mathbf{N}$.
3. Vous devez savoir quoi faire!
4. Il faut utiliser les questions précédente.
5. Vous pouvez passer à la limite dans l'égalité

$$(n+1)I_n = \ln(2) - 2J_{n+2}.$$

.....

Exercice 36.19. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e t^2 (\ln t)^n dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer la limite de la suite (I_n) .
4. Donner un équivalent de la suite (I_n) .

Indication 36.19. 1. Rien à signaler.

2. Il faut étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$: pour cela vous pouvez écrire cette expression comme une seule intégrale puis montrer que l'intégrande obtenue est négative.
3. Vous pouvez commencer par montrer que pour tout $t \in [1; e]$, $0 \leq \ln(t) \leq \frac{t}{e}$.
4.
 - Montrer que $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
 - Passer à la limite dans l'égalité précédente.

Exercice 36.20. Soit H la fonction définie par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Prouver que la fonction H est définie sur $I =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in I$, déterminer le signe de $H(x)$.
3. Étudier les limites de H en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\frac{H(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \frac{H(x)}{x}.$$

5. Calculer pour tout $x > 1$,

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}.$$

6. En déduire que H admet une limite en 1^+ et la déterminer.
7. Adapter le raisonnement précédent pour prouver que H admet une limite en 1^- et la déterminer.
8. En déduire que H est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}_+$. On note encore H ce prolongement.
9. En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.
10. Dresser le tableau des variations de la fonction H .

Indication 36.20. 1. Double inclusion.

2. Attention à l'ordre des bornes!
3. On peut commencer par encadrer.
4. Rien à signaler.
5. Rien à signaler.
6. Il faut utiliser les questions précédentes (vous pouvez commencer par obtenir $\frac{H(x)}{x^2} \leq \ln(2) \leq \frac{H(x)}{x}$).
7. On peut commencer par encadrer.
8. Rapide avec les questions précédentes (il n'y a pas de nouveaux calculs à faire!).
9. Vous pouvez commencer par montrer que $H' : x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$ puis montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ (le théorème de la limite de la dérivée peut être utile!).
10. Rapide avec les questions précédentes.

Exercice 36.21. Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$.

On définit la fonction F sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x).$$

Justifier que F est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire une égalité. Interpréter géométriquement ce résultat.

Indication 36.21. Pas besoin de taux d'accroissement ici.

Une fois que vous avez la dérivée de F , déduisez-en F .

Sommes de Riemann

Exercice 36.22. Étudier la limite éventuelle des suites dont les termes généraux sont donnés après.

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}};$

2. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2};$

3. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3};$

4. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}};$

5. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}};$

6. $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right);$

7. $u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2};$

8. $u_n = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \dots + \sqrt[n]{2^n});$

9. $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}.$

Indication 36.22. Les réponses sont :

1. $\sqrt{3} - 1;$

2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2};$

3. $\frac{\ln(9)}{3};$

4. $-\frac{2}{e} + 1;$

5. $\frac{1}{\ln(2)};$

6. $\frac{4}{e}.$

Exercice 36.23. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$w_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Indication 36.23. Il faut se ramener à une somme de Riemann. La réponse est $\frac{4}{e}$.

Exercice 36.24. Déterminer des équivalents des suites dont les termes généraux sont donnés après.

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k};$

2. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}};$

3. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$

Indication 36.24. Il faut chercher à faire apparaître des sommes comme des sommes de Riemann pour en déduire des équivalents des suites cherchées. Par exemple, pour la première question, $u_n \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.