TD 35 Espérance et variance

Espérance, variance, écart-type

Exercice 35.1. On lance trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de « Faces » obtenues. Donner la loi de X, puis $\mathbb{E}(X)$ et enfin $\mathbb{V}(X)$.

Indication 35.1. On répète une même expérience de manière aléatoire et on compte les succès, donc $X \sim$ ....

Exercice 35.2. On joue au jeu suivant : on lance trois dés non pipés : si le six n'est pas sorti, on perd un euro, s'il sort une, deux ou trois fois, on gagne respectivement un, deux, ou trois euros. Notons Y le nombre de six obtenus et X la variable aléatoire représentant le gain après une partie.

1. Donner la loi de Y, puis son espérance.
2. Déterminer la loi de X, puis son espérance. Le jeu est-il favorable ?

Indication 35.2.
1. Y suit une loi usuelle.
2. On obtient aisément X à partir de Y (par exemple, $(X = -1) = (Y = 0)$, donc $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = 0)$). Une fois la loi connue, on obtient l'espérance avec la formule du cours. On rappelle qu'un jeu est favorable si son espérance est positive.

en utilisant la définition de $\mathbb{E}(X)$).

Exercice 35.3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(\llbracket 3, 6 \rrbracket)$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X, puis l'espérance et la variance de Y et enfin la loi de Y.

Indication 35.3. Pour l'espérance et la variance de X, vous pouvez introduire $Z = X - 2$.

Pour l'espérance de Y, le plus astucieux est d'exprimer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{E}(X)$. Pour la variance de Y, il faut utiliser Kœnig-Huygens et la formule de transfert.

La méthode pour trouver la loi de Y à partir de celle de X est dans le cours.

Exercice 35.4. Perspicouac organise une loterie. Il vend 50 billets à 1 euro chacun, puis il choisit au hasard (de manière équiprobable) un billet. Le détenteur du billet en question gagne alors l'équivalent de 35 euros (c'est le prix de la bicyclette achetée en solde pour l'occasion). Pticachou achète un billet et Miaours en achète deux. On note T le gain de Pticachou et M celui de Miaours. Calculer l'espérance et la variance de T, ainsi que l'espérance de M.

Indication 35.4. Rien à signaler, il faut utiliser les formules du cours.

Exercice 35.5. On choisit au hasard deux nombres entiers (éventuellement égaux) dans l'intervalle $[-2\,;\,2]$, les couples de nombres étant équiprobables. On note X le produit des deux nombres choisis. Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Indication 35.5. Pour trouver la loi de X, il faut d'abord chercher $X(\Omega)$ puis pour chaque $x \in X(\Omega)$, chercher toutes les issues de $\{X = x\}$. Par exemple, $\{X = -4\} = \{(2, -2); (-2, 2)\}$ donc $\mathbb{P}(X = -4) = \dfrac{2}{25}$.
Une fois la loi déterminée, l'espérance s'en déduit via la formule du cours.

Exercice 35.6. Une variable aléatoire S obéit à une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Elle a pour espérance 6, et pour variance $3,6$. Quelles sont les valeurs de n et p ?

Indication 35.6. Le cours donne $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de n et p. On a donc un système de deux équations à deux inconnues (n et p) à résoudre.

. . . .

Exercice 35.7. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, telle qu'il existe un nombre réel strictement positif a pour lequel :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{a\binom{n}{k}}{k+1}.$$

1. Calculer a.
2. Calculer l'espérance et la variance de X. On pourra commencer par calculer $\mathbb{E}(X+1)$ et $\mathbb{E}\left(X(X+1)\right)$.

Indication 35.7.

1. Assez technique. Il faut utiliser que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$. Pour calculer $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)$, il faut voir que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ (cette formule se démontre assez facilement en revenant à la définition du coefficient binomial avec des factorielles).
   On doit trouver $a = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}$.
2. Formule de transfert ! $\mathbb{E}(X^2)$, on peut utiliser $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)+X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$.

. . . .

Exercice 35.8. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X \geqslant k\right)$.
2. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs. Lorsque le joueur commence un niveau (ce qui suppose qu'il ait réussi les niveaux précédents), la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X, et calculer, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X \geqslant k)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}(X) = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Indication 35.8.

1. On utilise l'astuce habituelle pour $\mathbb{P}(X=k)$, qui consiste à remarquer que
$$(X=k) \cup (X \leqslant k-1) = (X \leqslant k),$$
   et donc $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)$. Il reste alors à simplifier
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \sum_{k=0}^{n} k(\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1))$$
   (il faut séparer les sommes, faire un changement d'indice pour que les deux sommes contiennent des termes de la forme $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ et ensuite tout regrouper).
2. (a) Si on note A_i l'événement « le joueur réussit le niveau i », on a
$$(X \geqslant k) = A_1 \cap \cdots \cap A_k$$
   On peut alors utiliser la formule des probabilités composées (si vous avez des difficultés à le faire directement, vous pouvez écrire les calculs pour $k=2$, $k=3$ et ensuite généraliser).
   (b) Il faut utiliser toutes les questions précédentes et simplifier la somme usuelle.

. . . .

Exercice 35.9. À force de chercher qui est x, un professeur de mathématique devient fou. Il décide alors de noter au hasard, et indépendamment les unes des autres, n copies (mais d'ailleurs, qui est n ?) en accordant une égale probabilité à toutes les notes entières possibles de 0 à 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Pour $k \in [\![0, 20]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_n \leqslant k)$ et en déduire $\mathbb{P}(X_n = k)$. Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.
2. Démontrer que $\mathbb{E}(X_n) = 20 - \displaystyle\sum_{k=0}^{19} \left(\frac{k+1}{21}\right)^n$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Indication 35.9. 1. Pour tout i entier entre 1 et n, on note N_i la variable aléatoire égale à la note attribuée à la i-ème copie. Il faut exprimer $(X_n \leqslant k)$ à l'aide des événements $(N_i \leqslant k)$ et utiliser l'indépendance de ces derniers événements. Ensuite, $(X_n = k) = (X_n \leqslant k) \backslash (X_n \leqslant k-1)$ permet de trouver $\mathbb{P}(X_n = k)$.

2. Il faut appliquer la formule du cours (il y a un télescopage qui permet d'avancer !).

. . . .

Exercice 35.10. Soit $n \in \mathbf{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et l'on effectue alors un second tirage.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premier et second tirages.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 en fonction de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et démontrer que l'on a

$$2\mathbb{E}(X_2) = 1 - n + (3n+1)S_n.$$

Indication 35.10. 1. Loi usuelle.

2.
   - Pour la loi de X_2, il faut utiliser la formule des probabilités totales (en distinguant $k = j$ et $k \neq j$ pour le calcul de $\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_2 = j)$).
   - Pour montrer la formule sur l'espérance demandée, il faut partir de la définition et réassembler les termes de la somme. Il est utile de remarquer que $k^2 = k^2 - n^2 + n^2$.

. . . .

Exercice 35.11. On lance 6 dés idéaux. On note X le nombre de multiples de 3 obtenus.

1. Déterminer la loi de X. Préciser son espérance et son écart-type.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux multiples de 3 sachant qu'on en a obtenu au plus quatre.

Indication 35.11. 1. Loi usuelle.

2. On veut :

$$\mathbb{P}_{\{X\leqslant 4\}}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leqslant 4\} \cap \{2 \leqslant X \leqslant 4\})}{\mathbb{P}(X \leqslant 4)} = \frac{\mathbb{P}(\{2 \leqslant X \leqslant 4\})}{\mathbb{P}(X \leqslant 4)}.$$

Numérateur et dénominateur doivent maintenant être calculés.

. . . .

Exercice 35.12. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de « pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ (« pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n. On suppose que les déplacements du mobile sont indépendants.

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n.
   Démontrer que $X_n = 2D_n - n$ et en déduire, grâce à la loi de D_n, celle de X_n.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

Indication 35.12. 1. Pas si simple : il faut remarquer que la parité de X_n change à chaque pas pour conclure soigneusement.

2. Si G_n est le nombre de pas vers la gauche, que vaut $D_n + G_n$? Ensuite, exprimer X_n à l'aide de D_n et de G_n pour conclure que $X_n = 2D_n - n$.
   Pour trouver la loi de D_n, vous pouvez exprimer $\{X_n = k\}$ sous la forme $\{D_n = \cdots\}$.

3. Immédiat avec la question précédente et les opérations sur l'espérance et la variance.
4. Immédiat.

. . . .

Exercice 35.13. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Indication 35.13. Il faut appliquer la formule de transfert et chercher à transformer $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k}$ à l'aide de la formule du capitaine.

. . . .

Exercice 35.14. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On pourra utiliser la formule suivante sans la démontrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Une urne contient $n-2$ boules rouges numérotées de 1 à $n-2$ et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une et sans remise de toutes les boules de l'urne.

On note X la variables aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche, et Y celle correspondant au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note B_i l'événement « la i-ème boule tirée est blanche ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{P}(X=3)$.
2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Exprimer l'événement $(X=k)$ à l'aide de $B_1,\dots,B_n$, puis montrer que $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
3. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{3}$. Calculer $\mathbb{V}(X)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ où Z est le nombre de boules rouges restant dans l'urne lorsque la première boule blanche vient d'être tirée.
5. Déterminer la loi de Y.

Indication 35.14.
1. On pourra chercher à exprimer $(X=i)$ en fonction des B_i, $\overline{B_i}$, puis utiliser la formule des probabilités composées (vous pouvez vous aider d'un arbre si besoin).
2. On généralise la méthode de la question 1.
3. On applique la formule de définition de l'espérance pour calculer $\mathbb{E}(X)$. Pour la variance, on utilise la formule de Kœnig-Huygens et la formule de transfert pour $\mathbb{E}(X^2)$.
4. On peut exprimer Z en fonction de X (on a une relation affine) et utiliser les formules du cours pour obtenir $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
5. On peut introduire, pour $i \in [\![1;n]\!]$, l'événement N_i "la i-ème boule tirée porte le numéro 1". Puisque l'urne contient n boules dont 2 boules portant le numéro 1, on peut raisonner comme avant pour déterminer la loi de Y (qui est la même qu'une loi déjà déterminée).

. . . .

Exercice 35.15. Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons de cette urne. Notons X la somme des points obtenus, et Y le nombre de jetons de la poignée tirée. On suppose que Y est une variable aléatoire uniforme sur $[\![0,n]\!]$, et on convient que si Y prend la valeur 0, alors X prend la valeur 0.

1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_k en posant : $X_k = k$ si le jeton k est dans la poignée tirée, $X_k = 0$ sinon. Justifier que $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. (a) En utilisant le système complet $(\{Y=p\})_{p\in[\![0,n]\!]}$, montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = k) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) En déduire que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire $\dfrac{X_k}{k}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
3. En déduire l'espérance de X.

Indication 35.15.
1. Rien de spécial (il faut bien comprendre le sens des différentes variables aléatoires).

2. Il faut déjà expliquer pourquoi l'univers image de $\frac{X_k}{k}$ est $\{0, 1\}$, ce qui entraîne que cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X_k = k)$. Il reste alors à déterminer $\mathbb{P}(X_k = k)$ (il y a un quotient de coefficients binomiaux qui apparaît : on peut le simplifier avec la formule du capitaine).
3. On peut utiliser que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances des variables aléatoires.

. . . .

Exercice 35.16. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère n boules numérotées de 1 à n et n cases numérotées de 1 à n. On range au hasard les n boules dans les n cases en ne mettant qu'une seule boule par case. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note S_i la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si la i-iéme boule se trouve dans la i-ième case. On note S la variable aléatoire correspondant au nombre de boules se trouvant dans la case de même numéro.

1. Exprimer la variable aléatoire S à l'aide des variables aléatoires S_i.
2. Expliciter la loi et donner l'espérance des variables aléatoires S_i.
3. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, expliciter la loi et donner l'espérance de la variable aléatoire $S_i S_j$.
4. En déduire l'espérance et la variance de S.

Indication 35.16. 1. Rapide.
2. Loi usuelle.
3. La loi image vous indique que c'est encore une loi usuelle qu'il faut chercher.
4. Linéarité de l'espérance pour $\mathbb{E}(S)$. Pour $\mathbb{V}(S)$, il faut utiliser Kœnig-Huygens.

. . . .

Exercice 35.17. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois un dé non pipé. Soit X la somme des points obtenus et Y le plus grand nombre obtenu.

1. Calculer l'espérance et la variance de X (on pourra écrire X comme une somme de variables aléatoires plus simples).
2. Donner la loi de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Indication 35.17. 1. Notons, pour tout i, X_i la variable aléatoire donnant le chiffre obtenu. Exprimer X en fonction des X_i et en déduire aisément l'espérance et la variance de X.
2. Utiliser $\{Y = k\} \cup \{Y \leqslant k - 1\} = \{Y \leqslant k\}$.
3. Les variables ne sont pas indépendantes (il faut donc trouver un contre-exemple, c'est-à-dire i et j tels que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) \neq \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$).

Couple de variables aléatoires

. . . .

Exercice 35.18. On lance un dé non pipé. La variable aléatoire X est définie en donnant la valeur 2 lorsque le point marqué est pair et la valeur 1 lorsque le point marqué est impair. La variable aléatoire Y est définie en donnant la valeur 3 lorsque le point marqué est 1 ou 6 et la valeur 0 dans les autres cas.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Reprendre ces questions en définissant Y de la façon suivante : Y prend la valeur 3 lorsque le point marqué est 2 ou 6, et la valeur 0 dans les autres cas.

Indication 35.18. 1. Rapide (vous pouvez présenter le résultat dans un tableau).
2. Les lois de X et de Y s'obtiennent immédiatement à partir du tableau de la question précédente. La loi de XY est rapide aussi à trouver (comme d'habitude, il faut commencer par chercher l'univers-image).
On en déduit ensuite facilement la valeur de $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. Elles le sont.

4. Même travail, sauf qu'ici les variables ne sont plus indépendantes (immédiat une fois la valeur de$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ obtenue).

Exercice 35.19. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-après.

1. Déterminer les lois marginales.
2. Déterminer la loi de X sachant $\{Y = 0\}$ et la loi de Y sachant $\{X = 0\}$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Montrer qu'elles sont décorrélées.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Indication 35.19. 1. Utiliser les marges du tableau.

2. Il faut utiliser la formule qui définit une loi conditionnelle.
3. Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
4. Il faut utiliser la définition de la covariance. Les différents termes qui interviennent sont rapides à obtenir.

Exercice 35.20. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}.$$

Indication. On pourra étudier la variance de $Z_\lambda = \lambda X + Y$ en fonction de λ.

Indication 35.20. Il faut commencer par développer $\mathbb{V}(Z_\lambda)$ et remarquer que la fonction $\lambda \longmapsto \mathbb{V}(Z_\lambda)$ est un trinôme. Pour étudier son signe, vous pouvez utiliser le discriminant par exemple.

Exercice 35.21. Soit $p \in \mathbf{R}$ et X, Y deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli telles que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-après.

1. Que doit vérifier p pour que ce tableau définisse une loi conjointe ?
2. Déterminer les lois marginales.
3. Calculer les espérances et les variances de X et de Y.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
5. Pour quelle valeur de p les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6} + p$	$\frac{1}{3} - p$
1	$\frac{1}{2} - p$	p

Indication 35.21. 1. Il faut que toutes les valeurs du tableau soient positives et que leur somme soit égale à 1.

2. X et Y suivent des lois usuelles.
3. Immédiat puisqu'on connaît espérances et variances des lois usuelles.
4. Rapide avec la formule du cours.
5. Il faut travailler en deux temps.
   - Déjà, vous pouvez trouver la seule valeur de p possible en utilisant que X et Y ne peuvent être indépendante que si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
   - Il faut vérifier que pour la valeur de p obtenue, X et Y sont effectivement indépendantes.

Exercice 35.22. Soit $c \in \mathbf{N}$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur et la remet dans l'urne avec c autres boules de la même couleur, c étant un entier strictement positif. On répète n fois ce tirage suivant le même principe, n étant un entier supérieur ou égal à 2. On considère les variables aléatoires X_1,...,X_n définies par : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

- $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ième tirage ;
- $X_i = 0$ sinon.

On définit également pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire Z_p par $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Que représente Z_p ? Déterminer $Z_p(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 et son espérance.
4. Déterminer la loi de Z_2.
5. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k)$ pour tout $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + c\,\mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}$.
   (c) En déduire que $X_p \sim \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On raisonnera par récurrence en considérant la propriété H_p : « les variables aléatoires X_1,...,X_p suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ ». On calculera lors de l'hérédité $\mathbb{E}(Z_p)$.

Indication 35.22. 1. Rapide.
2. Loi usuelle.
3. Pour calculer $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j)$, vous pouvez utiliser des probabilités conditionnelles (autrement dit, la formule des probabilités composées). Une fois la loi conjointe obtenue, il est rapide d'en déduite une loi marginale (voir cours si besoin).
4. Déterminer $Z_2(\Omega)$ puis chercher « à la main » les issues de $(Z_2 = z)$ pour tout $z \in Z_2(\Omega)$.
5. (a) Il n'y a pas vraiment de calculs à faire ici, il faut bien comprendre la probabilité demandée et la donner.
   (b) Formule des probabilités totales.
   (c) Rien à signaler, l'indication est donnée dans l'énoncé.

Inégalités probabilistes

. . . .

Exercice 35.23. Un exploitant agricole possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables, qui contiennent chacune n places ($50 \leqslant n \leqslant 100$).
Notons X la variable aléatoire égale au nombre de vaches qui choisissent l'étable numéro 1.

1. Donner la loi de X, ainsi que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Notons E l'événement « chaque vache trouve une place ». Exprimer E à l'aide de X.
3. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place, avec une probabilité supérieure à 95%.

Indication 35.23. 1. Loi usuelle.
2. Si X vaches choisissent l'étable numéro 1, alors $100 - X$ vaches choisissent l'étable numéro 2. Vous pourrez noter E_1 (resp. E_2) l'événement « chaque vache peut entrer dans l'étable 1 (resp. 2) », de sorte que $E = E_1 \cap E_2$.
3. Majorer $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > n - 50)$ avec Bienaymé-Tchebychev est utile.

. . . .

Exercice 35.24. Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse. On souhaite estimer une valeur approchée de p.
Pour cela, on prélève n pièces. On suppose que la population des pièces est suffisamment grande pour que le prélèvement puisse être modélisé par une suite de n tirages successifs avec remise. On note X_n le nombre de pièces défectueuses obtenues.

1. Quelle est la loi de X_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

Indication 35.24. **1.** Loi usuelle.

2. Quelle inégalité pourrait-on bien appliquer ? ☺ Vous pouvez montrer que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour conclure.

3. Il faut utiliser la majoration précédente. À la fin, on trouve que $n \geqslant 50\,000$ convient.

Exercice 35.25 (*Inégalité de Cantelli*). Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $\{X - \mathbb{E}(X) \geqslant a\} \subset \left\{(X - \mathbb{E}(X) + t)^2 \geqslant (a+t)^2\right\}$.

2. En considérant la variable $X - \mathbb{E}(X) + t$, montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geqslant a) \leqslant \dfrac{t^2 + \mathbb{V}(X)}{(a+t)^2}$.

3. Déterminer en quelle valeur le minimum de la fonction suivante est atteint : $f : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^2 + \mathbb{V}(X)}{(a+t)^2} \end{array}$

4. En déduire l'inégalité de Cantelli : $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2 + \mathbb{V}(X)}$.

5. Comparer l'information donnée par cette inégalité à celle donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

6. Déduire de **4.** l'inégalité suivante : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{2\mathbb{V}(X)}{a^2 + \mathbb{V}(X)}$.

7. À nouveau, étudier l'intérêt de cette inégalité, en particulier par rapport à celle de Bienaymé-Tchebychev.

Indication 35.25. **1.** Il faut montrer que $X - \mathbb{E}(X) + t \geqslant a + t$.

2. Vous pouvez commencer par montrer que $\mathbb{P}\left(X - \mathbb{E}(X) \geqslant a\right) \leqslant \mathbb{P}\left(Y^2 \geqslant (a+t)^2\right)$ à l'aide de l'inégalité de Markov et de la question précédente. Il reste à calculer l'espérance de Y^2.

3. Étude de fonction standard.

4. Il faut appliquer la question **2.** pour une valeur pertinente de t.

5. Il faut écrire l'inégalité qu'on obtient avec Bienaymé-Tchebychev et qu'elle est moins précise que l'inégalité de Cantelli.

6. Il faut utiliser :

$$\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\} = \{X - \mathbb{E}(X) \geqslant a\} \cup \{-(X - \mathbb{E}(X)) \geqslant a\}$$

et appliquer le résultat de la question **4.** à $-X$.

7. Même idée que dans la question **5.**.