

TD 34

CONDITIONNEMENT ET
INDÉPENDANCE

Probabilités conditionnelles

.....

Exercice 34.1. On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité d'obtenir les 4 as.
2. Un joueur dévoile deux cartes de son jeu et ce sont des as. Calculer la probabilité qu'il détienne les 4 as.

Indication 34.1. La question 2. revient à calculer une probabilité conditionnelle. On pourra faire une disjonction de cas pour compter les mains avec au moins deux as.

.....

Exercice 34.2. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse est $p \in]0; 1[$. Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Indication 34.2. Vous pouvez introduire $B = \text{« l'étudiant connaît la bonne réponse »}$, et $C = \text{« l'étudiant a répondu correctement »}$. Quelle probabilité demande-t-on ici ?

.....

Exercice 34.3. On dispose de trois cartes : l'une a deux faces noires, une autre deux faces blanches, et la troisième une face noire et une face blanche. On tire une carte au hasard et sans la regarder, on la pose sur la table (les deux faces ont la même probabilité d'être visibles). La face observée est noire. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ?

Indication 34.3. Si $N = \text{« la face observée est noire »}$ et $C_i = \text{« on tire la } i\text{-ième carte décrite dans l'énoncé »}$, quelle probabilité demande-t-on de calculer ici ?

.....

Exercice 34.4 (Problème de Monty Hall). On dispose de trois verres opaques. Le meneur du jeu a caché dix euros sous l'un de ces verres. Le joueur désigne un des trois verres.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait désigné le verre cachant l'argent ?
2. Parmi les deux verres non désignés, le meneur du jeu écarte alors un verre qu'il sait vide. Le joueur peut alors décider de modifier son choix. Que lui conseillez-vous ?

Indication 34.4. La question 1. est immédiate. Pour la question 2., il faut bien modéliser l'expérience à l'aide de probabilités conditionnelles, et il n'y a pas de problème particulier (même si la réponse peut surprendre si l'on a pas trop réfléchi à la situation avant...)

.....

Exercice 34.5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout k compris entre 1 et n , le sac S_k contient k jetons blancs et $(n+1-k)$ jetons mauves. On choisit un sac de sorte que la probabilité de choisir le sac S_k soit égale à αk pour tout k compris entre 1 et n , ce après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α de sorte à ce que le problème soit bien posé.
2. Le jeton pioché est mauve. Exprimer en fonction de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k . Simplifier au maximum l'expression obtenue.

Indication 34.5. 1. Que doit valoir $\sum_{k=1}^n \alpha k$ pour que le problème soit bien posé ?

2. Quelle probabilité demande-t-on ? Ensuite, une formule du cours donne la réponse (il y a quelques calculs pour simplifier les sommes qui apparaissent).
Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que vaut $\mathbb{P}_{T_i}(M)$? (il n'y a pas de formule à utiliser, la réponse est « directement » donnée dans le texte ; commencez par traduire en français cette probabilité conditionnelle en cas de difficulté).
-

Exercice 34.6. Une urne contient cinq boules blanches et sept rouges. On effectue trois tirages d'une boule suivant la procédure suivante : à chaque tirage, on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités d'obtenir :

1. aucune boule blanche ;
2. exactement une boule blanche ;
3. trois boules blanches ;
4. exactement deux boules blanches.

Indication 34.6. On pourra introduire B_i l'événement « au i -ième tirage, on obtient la boule blanche ».

1. Voir formule des probabilités composées.
 2. Traduire l'événement à l'aide d'opérations sur B_i , la réponse vient ensuite assez naturellement.
 3. Reprendre la méthode de la question 1.
 4. Faire le lien avec les questions précédentes.
-

Exercice 34.7. M. Kiboitro, gardien de son état, possède un trousseau de n clés. Dans l'entreprise où il travaille, une nuit, il arrive devant la porte d'une salle où la lumière est restée allumée. Il veut éteindre la lumière, il sait qu'une seule des n clés de son trousseau peut ouvrir cette porte, mais il ne sait plus laquelle.

1. 1er cas : M. Kiboitro est ivre mort. Pour ouvrir la porte, il essaie les clés au hasard une à une, mais comme il a trop bu, il ne met pas à l'écart les clés qu'il a déjà essayées. Il s'autorise au plus n essais (il arrive encore à compter malgré son état). On note X la variable aléatoire égale à 0 s'il n'a pas réussi à ouvrir la porte et qui vaut k s'il a réussi à ouvrir la porte au bout de k tentatives (où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$). Donner la loi de X .
2. 2ème cas : M. Kiboitro n'a pas bu de la journée. Pour ouvrir la porte, il essaie les clés au hasard une à une en mettant à l'écart les clés qu'il a déjà essayées. Quelle est la loi de X pour cette nouvelle expérience aléatoire ?

Indication 34.7. 1. On note, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, R_k l'événement « à la k -ième tentative, la porte s'ouvre ». Vous pouvez, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, commencer par exprimer $(X = k)$ en fonction de $R_1, \dots, R_n$. Ensuite, il faut utiliser une formule du cours.

2. Même idée ! Vous devez reconnaître une loi usuelle à la fin.
-

Exercice 34.8. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations (qui peuvent être annulées) sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n , il y a 4 chances sur 10 pour que quelqu'un la réserve au jour $n + 1$. En revanche, si elle est réservée au jour n , il y a 9 chances sur 10 pour qu'elle soit réservée au jour $n + 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons p_n la probabilité que la place donnée soit réservée au jour n .

1. Donner la valeur de p_0 .
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
3. En déduire l'expression de p_n .
4. Quelle est la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Indication 34.8. 1. La réponse est directement dans l'énoncé.

2. On peut introduire $A_n =$ « la place est réservée au jour n » et traduire les données de l'énoncé.
 3. On a une suite arithmético-géométrique, donc on sait déterminer son terme général.
 4. Immédiat.
-

Exercice 34.9. Les poules pondent des œufs que l'on classe suivant trois calibres : A (petit), B (moyen) et C (gros). On suppose que si une poule pond un œuf d'un certain calibre, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera du même calibre, avec une probabilité $\frac{1}{2}$, et d'un des deux autres calibres avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par a_n , b_n et c_n les probabilités respectives pour que le n -ième œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

Pour tout entier naturel n non nul, posons

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
2. À l'aide de la question précédente, trouver une matrice U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Montrer que U est une combinaison linéaire des matrices J (matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1) et I_3 . Calculer J^k pour tout $k \in \mathbf{N}$ (on pourra distinguer le cas $k = 0$) et en déduire l'expression de U^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des questions précédentes l'expression des termes généraux des suites a , b et c , ainsi que les limites de ces suites.

Indication 34.9. 1. On peut par exemple noter A_n (resp. B_n et C_n) l'événement « l'œuf pondu au n -ième jour est de calibre A (resp. B et C) ». On peut ensuite appliquer la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \dots$

2. Rien à signaler.
3. Pour calculer J^k , on pourra commencer par faire une conjecture (classique). Le reste est aussi un classique calcul de puissance.
4. (X_n) est une suite géométrique matricielle (revoir le cours sur le calcul matriciel au besoin!).

Exercice 34.10. On considère deux urnes : une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1, et une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.

On appelle "échange" l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne. On effectue des échanges successifs indéfiniment. Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par Z_n la variable aléatoire réelle discrète égale à la somme des points marqués sur les jetons de l'urne bleue après le n -ième échange. On note Z_0 la variable certaine égale à 1, somme initiale des points dans l'urne bleue.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de Z_1 et déterminer la loi de Z_1 .
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{Z_n=0}(Z_{n+1}=0)$$

$$\mathbb{P}_{Z_n=1}(Z_{n+1}=0)$$

$$\mathbb{P}_{Z_n=2}(Z_{n+1}=0)$$

On note dans la suite pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $p_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(Z_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 2)$.

3. Exprimer p_{n+1} en fonction de q_n , puis q_{n+1} en fonction de p_n , q_n et r_n , et enfin, r_{n+1} en fonction de q_n .

On note pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$U_{n+1} = AU_n$. Cette relation est-elle encore valable pour $n = 0$?

4. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, $U_n = A^n U_0$.

On donne pour $n \in \mathbf{N}^*$, $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 - (-1/2)^n \\ 4 + 2(-1/2)^n \\ 1 - 1(-1/2)^n \end{pmatrix}$.

5. En déduire pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, p_n , q_n , r_n en fonction de n , ainsi que leur limite.

Indication 34.10. 1. Rien à signaler, il faut bien comprendre l'énoncé (et donc le lire attentivement).

2. Rien à signaler, il faut lire attentivement l'énoncé (il n'y a pas de calcul à faire ici, on obtient directement la réponse si on a bien compris).
3. Il faut appliquer la formule des probabilités totales au SCE $\{(Z_n = 0), (Z_n = 1), (Z_n = 2)\}$ pour chaque relation de récurrence (donc trois fois en tout).
On écrit ensuite le système de relations de récurrence sous forme matricielle (comme on l'a déjà fait avant).
4. Récurrence classique.
5. Il faut utiliser le résultat fourni par l'énoncé à la question précédente.

Indépendance

Exercice 34.11. On tire deux pièces de monnaie équilibrées et on considère A l'événement « la première pièce tombe sur Face », B l'événement « la deuxième pièce tombe sur Face » et C l'événement « les deux pièces tombent du même côté ». Les événements A , B , C sont-ils indépendants deux à deux ? Et mutuellement indépendants ?

Indication 34.11. Rien de particulier : revoir les définitions.

Exercice 34.12. Soit $n \geq 2$ un entier. On s'intéresse à une famille dans laquelle il y a exactement n enfants, filles ou garçons. On note :

- A l'événement « la famille a des enfants des deux sexes » ;
- B l'événement « la famille a au plus une fille ».

Montrer que A et B sont des événements indépendants si et seulement si $n = 3$.

Indication 34.12. Il faut calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ (qui dépendent de n) et montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff 2^n - 2n - 2 = 0.$$

Il reste à montrer que cette équation admet une unique solution (j'espère que vous voyez quel théorème utiliser ☺).

Exercice 34.13. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , on tire deux boules une à une, sans remise. On note X_1 le premier numéro tiré, X_2 le deuxième numéro tiré. Soit $X = \min(X_1; X_2)$ et $Y = \max(X_1; X_2)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer la loi de X et celle de Y .
3. Étudier l'indépendance des variables X et Y .

Indication 34.13. 1. Rien de particulier (il n'y a pas beaucoup de calculs à faire ici).

2. Vous pouvez utiliser le système complet d'événements $\{(Y = 2), \dots, (Y = n)\}$ pour montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n+1)}$ (où $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$). Idem pour la loi de Y .

3. Il suffit de trouver un exemple de k et ℓ pour lequel on n'a pas $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell)$.

Exercice 34.14. Soit X et Y deux variables indépendantes définies par :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $Z = XY$.

Montrer que les variables aléatoires X , Y , Z sont indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

Indication 34.14. Il faut utiliser les définitions (pour montrer que X, Y, Z ne sont pas indépendantes, un contre-exemple suffit !).

Exercice 34.15. On dispose de deux dés A et B dont les faces sont soit rouges, soit blanches. Le dé A a quatre faces rouges, le dé B quatre faces blanches. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le résultat est 1 ou 6, on ne joue ensuite qu'avec le dé A , sinon on ne joue qu'avec le dé B . On lance ensuite le dé sélectionné un certain nombre de fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « rouge » au premier jeu ? (le lancer de dé pour savoir avec quel dé jouer ne compte pas comme un jeu).
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers jeux. Quelle est la probabilité d'avoir rouge au troisième jeu ?
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers jeux. Calculer la probabilité d'avoir utilisé le dé A .

Indication 34.15. On note R_i = « on a obtenu rouge au i -ième lancer », N_i = « on a obtenu noir au i -ième lancer », A = « on a utilisé le dé A » et B = « on a utilisé le dé B ».

1. Rien à signaler.

2. Écrire la probabilité cherchée comme une probabilité conditionnelle. On pourra utiliser l'union disjointe :

$$R_1 \cap R_2 \cap R_3 = (A \cap R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (B \cap R_1 \cap R_2 \cap R_3).$$

On notera également que $R_1 \perp\!\!\!\perp R_2$ (attention, même si on a aussi $R_1 \perp\!\!\!\perp R_3$ et $R_2 \perp\!\!\!\perp R_3$, ces relations n'entraînent pas que R_1, R_2 et R_3 sont mutuellement indépendants, donc on n'a pas *a priori* $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) \times \mathbb{P}(R_3)$).

3. En reprenant la méthode utilisée dans la question 2., calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n R_k\right)$ et $\mathbb{P}\left(A \cap \bigcap_{k=1}^n R_k\right)$.

Exercice 34.16. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$ dans le cas où A et B sont disjoints, puis lorsque A et B sont indépendants, et enfin lorsque A est inclus dans B .

Indication 34.16. Pour les questions 1. et 2., il faut utiliser les définitions et la formule de Poincaré. Pour 3. si $A \subset B$, alors $A \cup B = \dots$

Exercice 34.17. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X = Y\}$.

Indication 34.17. Vous pouvez écrire $\{X = Y\}$ comme la réunion disjointe de deux événements.

Exercice 34.18. On considère deux variables aléatoires finies X_1 et X_2 de même loi. Soit Y une variable aléatoire de Bernoulli indépendante de X_1 et de X_2 .

Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z définie par $Z = X_1 Y + X_2 (1 - Y)$.

Indication 34.18. Il faut montrer que Z suit la même loi que X_1 et X_2 .

Exercice 34.19. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires (mutuellement) indépendantes et de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, n étant un entier naturel pair strictement positif.

Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X = Y), \quad P(X \geq 2Y), \quad \text{et} \quad P(X + Y \leq Z)$$

Indication 34.19. Vous pouvez à chaque fois disjointer suivant les valeurs de Y . Par exemple, pour les deux premiers calculs :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = Y \text{ et } Y = i), \quad \mathbb{P}(X \geq 2Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y = i) \mathbb{P}_{(Y=i)}(X \geq 2Y).$$

Le troisième est plus difficile. Vous pouvez déjà commencer par revoir comment trouver la loi d'une somme de variables aléatoires.

Exercice 34.20. On tire 5 fois de suite 1 carte d'un jeu de 32 cartes, avec remise. Quelle est la probabilité de tirer au moins 2 as ?

Indication 34.20. On peut introduire une variable aléatoire X qui compte les succès d'une certaine expérience répétée, de sorte que X suive une loi usuelle. La question revient alors à calculer

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5),$$

ce qui est long. Il est plus simple de passer par l'événement contraire !

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{X \geq 2}) = \dots$$

Exercice 34.21. Lorsque les éléphants sautent en parachute au dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis sur les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact au sol est notée p avec $p \in]0; 1[$ et les raquettes sont indépendantes.

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. On note X la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de X .
2. Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de Y .
3. On suppose qu'un éléphant s'enlise s'il perd strictement plus de la moitié de son équipement. Comparer, en fonction de p , les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

Indication 34.21. 1. Loi usuelle.

2. Idem.

3. Il faut comparer $\mathbb{P}(X < 2)$ et $\mathbb{P}(Y < 1)$. Pour calculer $\mathbb{P}(X < 2)$ par exemple, vous pouvez commencer par écrire $(X < 2)$ avec des événements du type $(X = \dots)$ dont on sait calculer la probabilité.

Exercice 34.22 (CCINP 2023). Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Ces appels sont indépendants les uns des autres et, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé vaut $p \in]0; 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Après ses n appels, le secrétaire appelle une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacune des personnes qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus au total.
 - (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = \ell)$.
 - (b) Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \in \llbracket 0, r \rrbracket$. Montrer que

$$\binom{n-k}{r-k} \binom{n}{k} = \binom{r}{k} \binom{n}{r}.$$

- (c) Déterminer la loi de Z .

Indication 34.22. 1. X suit une loi usuelle.

2. (a) La loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$ est une certaine loi binomiale.
- (b) Il faut réécrire les coefficients binomiaux avec des factorielles et faire les simplifications adéquates.
- (c) Il faut chercher à appliquer la formule des probabilités totales. On pourra utiliser la formule de la question précédente (surprenant, n'est-ce pas? ☺).

Exercice 34.23. On lance n fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de « Pile » obtenus et Y le numéro du premier lancer qui a donné « Pile » (avec la convention que Y vaut 0 si on ne fait que des « Face »). Les lancers sont indépendants. Donner la loi conjointe de X et Y .

Indication 34.23. Soit $j, k \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. On peut séparer 4 cas.

- Que vaut $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0)$?
- Si $k > n - j + 1$, que vaut $\mathbb{P}(X = j, Y = k)$?
- Si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que valent $\mathbb{P}(X = 0, Y = k)$ et $\mathbb{P}(X = j, Y = 0)$?
- Le dernier cas demande des calculs (contrairement aux autres). Il faut commencer par remarquer que

$$\mathbb{P}(X = j, Y = k) = \mathbb{P}(Y = k) \times \mathbb{P}_{(Y=k)}(X = j)$$

puis calculer ces deux termes (il y a une loi conditionnelle usuelle à reconnaître).