TD 33 — Probabilités et variables aléatoires

Généralités sur les probabilités

Exercice 33.1. Soit A, B, C trois événements. Exprimer à l'aide d'opérations (union, intersection, complémentaire) sur A, B et C les événements suivants.

1. D : « aucun des événements A, B, C n'est réalisé » ;
2. E : « au moins un des événements A, B, C est réalisé » ;
3. F : « exactement un des événements A, B, C est réalisé » ;
4. G : « au plus un des événements A, B, C est réalisé ».

Indication 33.1. Rien de particulier. Relire si besoin de le sens de $\cup$, $\cap$ et du complémentaire.

Exercice 33.2. On lance cent fois de suite une pièce. Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient Pile au k-ième lancer ». Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A_k :

1. B : « le premier Pile est obtenu au deuxième lancer » ;
2. C : « le premier Face est obtenu au quatrième lancer » ;
3. D_n : « le premier Face est obtenu au n-ième lancer » (où $n \in [\![2, 10]\!]$) ;
4. E : « le second Pile est obtenu au quatrième lancer » ;
5. F : « au plus un Face est tiré » ;
6. G : « on n'observe jamais de séquence (Pile,Face) ».

Indication 33.2.

4. On pourra écrire l'union disjointe des cas suivants : le premier pile est obtenu au premier (resp. deuxième, resp. troisième) lancer.
5. On pourra écrire l'union disjointe des cas suivants : exactement un face est obtenu, aucun face n'est obtenu.
6. Dans ce cas, on a uniquement des faces, puis uniquement des piles.

Exercice 33.3. On considère un dé truqué à six faces. Les probabilités d'apparition des faces paires sont égales, de même pour les faces impaires. La probabilité d'obtenir une face paire est deux fois celle d'obtenir une face impaire. Quelle est la probabilité d'obtenir une face inférieure à 3 ?

Indication 33.3. On pourra commencer par chercher les probabilités x et y d'obtenir une face paire et impaire respectivement.

Exercice 33.4. On parie au hasard sur une course de dix chevaux. Quelles sont les probabilités de gagner :

1. au tiercé dans le désordre (c'est-à-dire qu'on a trouvé les trois premiers mais pas nécessairement dans le bon ordre) ?
2. au tiercé dans l'ordre (c'est-à-dire qu'on a trouvé le premier, le deuxième et le troisième) ?

Indication 33.4. Relire le cours sur le dénombrement pour voir comment modéliser cette situation (les répétitions sont interdites dans les deux cas, mais l'ordre ne compte que dans le deuxième cas).

Exercice 33.5. Le code d'une carte bancaire est une suite ordonnée de quatre chiffres pris au hasard dans l'ensemble $[\![0, 9]\!]$. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « le code est formé de chiffres distincts » ;
2. B : « le code est formé d'une suite strictement croissante » ;
3. C : « le code comporte trois fois exactement le même chiffre » ;
4. D : « le code ne comporte que des chiffre impairs ».

Indication 33.5. 1. Il faut choisir le premier chiffre, puis le second, etc.

2. Pour dénombrer, une stratégie est de choisir simultanément 4 chiffres tous distincts puis de les ordonner.
3. On choisit le chiffre à répéter, le chiffre seul et la position du chiffre seul.
4. Il faut choisir le premier chiffre, puis le second, etc.

. . . .

Exercice 33.6. Un sac de bonbons contient 10 bonbons rouges, 15 bonbons oranges et 20 bonbons jaunes. Un enfant plonge la main dans le sac et en ressort quatre bonbons. Déterminer les probabilités des événements suivants.

1. A : « on obtient quatre bonbons de la même couleur » ;
2. B : « on obtient un bonbon au moins de chaque couleur » ;
3. C : « on obtient le même nombre de bonbons rouges et de bonbons jaunes ? ».

Indication 33.6. (a) Disjoindre des cas.

(b) On peut encore disjoindre des cas (ou autrement : il y a plusieurs façons de faire ici...)

(c) Encore une fois, on peut disjoindre des cas.

. . . .

Exercice 33.7. On range aléatoirement cinq boules numérotées de 1 à 5 dans quatre boîtes numérotées de 1 à 4.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boîte ?
3. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
4. Même question avec une boîte vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

Indication 33.7. 1. Pour chaque boule, il y a 4 possibilités, donc...

2. Combien y-a-t-il de rangements où toutes les boules sont dans la même boite ?
3. On peut choisir les deux boîtes vides, puis placer les boules dans les boîtes restantes. Attention à ce que la stratégie pour placer les boules dans les boîtes restantes ne laisse pas de nouvelle boîte vide !
4. On peut répartir les boules comme suit, si on veut exactement une boîte vide : 3-1-1-0 ou 2-2-1-0.
5. Il faut faire le lien avec les questions précédentes.

. . . .

Exercice 33.8. On lance trois dés cubiques non pipés. On considère les événements suivants.

- A : « trois chiffres tous distincts » ;
- B : « exactement deux chiffres distincts ».

1. Proposer un univers pour lequel on est dans une situation d'équiprobabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Indication 33.8. On pourra supposer les dés discernables, pour être dans une situation d'équiprobabilité.

. . . .

Exercice 33.9. On tire quatre cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « on obtient un carré » ;
2. B : « on obtient au moins un as » ;
3. C : « on obtient une suite croissante de quatre cartes consécutives, non nécessairement de la même couleur » ;
4. D : « on obtient deux cartes rouges et deux cartes noires » ;

5. E : « on obtient exactement une dame et deux piques ».

Indication 33.9. **1.** Choisir un carré revient à choisir la valeur de la carte.

2. Événement du type « au moins un », donc il est plus rapide d'utiliser l'événement...

3. On peut choisir la valeur de la première carte, puis la couleur des cartes.

4. Rien à signaler.

5. Attention à ne pas compter des cartes deux fois. Une fois la dame et les piques choisis, attention à ne pas sélectionner de dame ou de pique en choisissant la ou les cartes restantes.

. . . .

Exercice 33.10. Soit A et B deux événements de probabilités respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}$. On suppose que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

1. Calculer la probabilité qu'au moins un des deux événements se réalise.

2. Calculer la probabilité qu'exactement un des deux se réalise.

Indication 33.10. **1.** Voir cours.

2. Traduire l'événement à l'aide d'opérations sur A et B.

. . . .

Exercice 33.11. On lance deux dés équilibrés et on note les deux faces visibles obtenues. On note E l'événement « la somme des faces visibles est impaire », F l'événement « au moins l'une des faces est 1 » et G l'événement « la somme des faces est 5 ».

1. Donner toutes les issues de $E \cap F$, $F \cap G$ et $\overline{E \cup F}$.

2. Calculer $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(E \cap F)$, $\mathbb{P}(F \cap G)$, $\mathbb{P}(E \cup F)$.

3. En déduire $\mathbb{P}(F \cup G)$, $\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F})$, $\mathbb{P}(\overline{F} \cap \overline{G})$.

Indication 33.11. Vous pouvez choisir $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ (pour être dans une situation de probabilité uniforme, à partir de la question **2.**).

1. Traduire en français les événements avant de chercher les issues (qui sont des couples d'entiers entre 1 et 6).

2. Il faut utiliser la question précédente pour simplement lire les cardinaux demandés (sinon il faut commencer par écrire toutes les issues des événements proposés).

3. La formule du crible de Poincaré pour deux ensembles et les formules de Morgan sont utiles !

. . . .

Exercice 33.12. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge, toutes trois indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « la première et la dernière boule sont de la même couleur » ;

2. B : « le tirage est bicolore » ;

3. C : « on a obtenue au moins une boule de chaque couleur ».

Indication 33.12. **1.** On choisit les boules aux extrémités puis les boules « centrales ».

2. Choix des deux couleurs, puis chaque boules a deux couleurs possibles (attention aux tirages monochromes !).

3. On peut utiliser le résultat de la question précédente.

. . . .

Exercice 33.13. Dans une tombola, 1000 billets dont 2 gagnants sont mis en vente. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?
Vous pourrez utiliser sans démonstration que les racines de $X^2 - 1999X + 500 \times 999$ sont approximativement égales à $292,7$ et $1706,3$.

Indication 33.13. En notant n le nombre de billets achetés et G_n l'événement « on gagne », il est plus simple de commencer par chercher $\mathbb{P}(\overline{G_n})$.

. . . .

Exercice 33.14. Soit $(n, r) \in (\mathbf{N}^\star)^2$, $k \in [\![1, n]\!]$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules au hasard, successivement, et avec remise. Le but de l'exercice est de calculer la probabilité que, sur r tirages, le plus grand des numéros obtenus soit k. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on considère les événements :

- $A_{k,i}$: « le numéro obtenu au i-ième tirage est inférieur ou égal à k » ;
- B_k : « sur r tirages, le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à k » ;
- C_k : « sur r tirages, le plus grand numéro est égal à k ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{k,1})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(B_k)$.
3. En remarquant que $C_k = B_k \cap \overline{B_{k-1}}$, en déduire $\mathbb{P}(C_k)$.

Indication 33.14. 1. Immédiat.

2. On peut chercher à utiliser la question précédente, on directement répondre en remarquant que toutes les boules doivent être choisies dans $[\![1, k]\!]$.
3. On utilise la formule $\mathbb{P}(A \backslash B) = ...$

Variables aléatoires

Exercice 33.15. Un joueur lance un dé à six faces.

- Il perd un euro s'il fait 4.
- Il gagne un euro s'il fait 1, 3 ou 6.
- Il ne gagne ni ne perd d'argent sinon.

On note X le gain algébrique du joueur.

1. Expliciter les événements suivants (c'est-à-dire donner toutes les issues qui les réalisent) :

$$\{X = 0\}, \quad \{X = 2\}, \quad \{X \leqslant 0\}.$$

2. Déterminer le support et la loi de la variable aléatoire X.
3. On pose $Y = 2X + 3$. Déterminer la loi de Y.
4. On pose $Z = X^2$. Déterminer la loi de Z.

Indication 33.15. 1. Ce sont des événements, donc des ensembles d'issues. Ainsi, on demande d'écrire $(X = 0) = \{\cdots\}$, où les issues qui réalisent $(X = 0)$ sont à inscrire dans les accolades.

2. Rien de particulier, il faut compter les issues qui réalisent chaque $(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
3. La méthode est dans le cours.
4. Idem.

Exercice 33.16. Cinquante pièces arrivent dans une usine, dont quatre sont défectueuses. Le contrôle qualité de l'usine teste au hasard dix pièces et renvoie le lot s'il trouve une pièce défectueuse.

1. On note N le nombre de pièces défectueuses parmi les dix testées lors du contrôle qualité. Donner la loi de N.
2. On note X la variable aléatoire égale à 1 si la livraison passe le contrôle qualité et égale à 0 sinon. Déterminer la loi de X.

Indication 33.16. 1. Combien de pièces défectueuses peut-on avoir d'après les données de l'énoncé ? Cela fournit $N(\Omega)$. Ensuite, déterminer $\mathbb{P}(N = n)$ pour chaque $n \in N(\Omega)$ est un problème de dénombrement (comment sont effectués les tirages ici ?).

2. Il faut reconnaître une loi usuelle ; il n'y a plus de calculs à faire ici.

Exercice 33.17. Soit $X \sim \mathscr{U}([\![-2, 2]\!])$.

1. Donner la loi de $Y = 1 - X$.
2. Donner la loi de $Z = X^2$.

Indication 33.17. On demande des lois image (la méthode est dans le cours).

Exercice 33.18. On considère un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X.

2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y.

Indication 33.18. **1.** Il faut déjà donné l'univers image. Ensuite, d'après l'énoncé il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = ak$. Il faut ensuite utiliser que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 1$ (sans oublier de justifier d'où vient cette égalité) pour trouver a.

2. On trouve l'univers image de Y puis sa loi avec la méthode du cours.

Exercice 33.19. On considère un dé à 12 faces truqué : quand on le lance, on a deux fois plus de chance de tomber sur une face portant un nombre pair que sur une face portant un nombre impair, les faces de même parité étant équiprobables. On lance une fois ce dé, et l'on considère le résultat obtenu.

On note $\Omega = [\![1, 12]\!]$ l'univers associé à cette expérience et $\mathbb{P}$ la probabilité sur Ω associée à l'expérience.

On note X la distance absolue à 6 du résultat du lancer. Par exemple, si l'on obtient 2 au lancer du dé, X prend la valeur 4. On pose $Y = X^2 - 3X$.

1. En se basant sur la description du dé, expliciter la distribution de probabilité associée à $\mathbb{P}$, autrement dit, déterminer $\mathbb{P}(\{k\})$ pour tout $k \in [\![1, 12]\!]$.

2. Déterminer la loi de X puis la loi de Y.

Indication 33.19. **1.** Notons $p_p = \mathbb{P}(\{k\})$ pour k pair et $p_i = \mathbb{P}(\{k\})$ pour k impair. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} \mathbb{P}(\{k\})$? Vous pouvez en déduire p_p et p_i.

2. Il faut calculer les distances à 6 de tous les éléments de $[\![1, 12]\!]$, ce qui fournit l'univers image et permet aussi d'en déduire la loi de X (par exemple, $(X = 1) = \{5, 7\}$, donc $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{7\})$ et l'on peut conclure avec la question précédente.

3. C'est une composition d'une variable aléatoire par une fonction : la méthode est dans le cours.

Exercice 33.20. Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on lance n fois une pièce équilibré, et on note X le nombre de Piles obtenus.

1. Déterminer la loi de X.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de Piles que de Faces ?

Indication 33.20. **1.** Il faut dénombrer. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\text{Card}((X = k))$ revient à compter les anagrammes d'un mot de n lettres qui contient k « P » et $n - k$ « F ».

2. Il faut déterminer la probabilité de $A = \left\{X > \dfrac{n}{2}\right\}$. Par symétrie, c'est la même que celle de $B = \left\{X < \dfrac{n}{2}\right\}$. Il faut distinguer des cas suivant la parité de n, et utiliser des SCE avec A et B (attention, pour le cas pair, $\{A, B\}$ n'est pas un SCE, il manque un événement !).

Exercice 33.21. Un joueur prélève n boules successivement et avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On considère la variable aléatoire X égale au plus grand des numéros des boules tirées.

1. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$.

2. En déduire la loi de X.

Indication 33.21. **1.** $(X \leqslant k)$ est l'événement où l'on ne tire que des boules dont le numéro est entre 1 et k, donc la probabilité de cet événement est rapide à déterminer.

2. Ensuite, il faut utiliser l'astuce habituelle pour $\mathbb{P}(X = k)$, qui consiste à remarquer que
$$(X = k) \cup (X \leqslant k - 1) = (X \leqslant k),$$
et donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1) = \ldots.$

Couples de variables aléatoires

Exercice 33.22. On considère une urne contenant 6 boules. Il y a une boule numérotée « 1 » , deux boules numérotées « 2 » et trois boules numérotées « 3 » .

On tire simultanément au hasard deux boules (sans remise donc) dans l'urne. On note X le plus petit des deux nombres et Y le plus grand.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. En déduire les loi marginales de X et Y.
3. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Indication 33.22. Les tirages sont simultanés : comment modéliser cette situation ? Vous pouvez en déduire $\text{Card}(\Omega)$.

1. Il faut d'abord trouver $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, puis chercher les issues de $(X, Y) = (x, y)$ pour chaque $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$ (à la main, ça prend un peu de temps). Ensuite on peut en déduire la loi conjointe dans un tableau.
2. La méthode pour obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe est dans le cours.
3. Composée d'une variable aléatoire par une fonction : la méthode est dans le cours (vous pouvez chercher les $(Z = k)$ pour $k \in Z(\Omega)$ à la main, comme à la question **1.**).

Exercice 33.23. On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On note D_1 et D_2 les résultats de chacun de ces dés.

1. Donner la loi conjointe de (D_1, D_2).
2. On note $S = D_1 + D_2$. Déterminer la loi de S.
3. On note $M = \max(D_1, D_2)$. Déterminer la loi de M.

Indication 33.23.
1. Il faut reconnaître une loi usuelle.
2. Commencer par déterminer $S(\Omega)$ puis à la main dénombrer les issues de chaque $(S = s)$, pour tout $s \in S(\Omega)$.
3. Même méthode qu'à la question précédente.

Exercice 33.24. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]^2$.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$.
3. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
4. Déterminer la loi de $D = |X - Y|$.

Indication 33.24.
1. Il y a une formule dans le cours pour obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe.
2. $\mathbb{P}(X = Y) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = y \text{ et } Y = y)$, le calcul n'est ensuite plus long.

   Vous pouvez montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant Y) = \dfrac{1 + \mathbb{P}(X = Y)}{2}$ (la formule du crible pour deux événements est utile, ainsi que l'égalité $\mathbb{P}(X \geqslant Y) = \mathbb{P}(Y \geqslant X)$, qui provient de la symétrie des rôles joués par X et par Y).
3. Comme d'habitude, on cherche déjà $S(\Omega)$. Vous pouvez ensuite commencer par montrer que, pour tout $s \in S(\Omega)$, $\mathbb{P}(S = s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} \mathbf{1}_{[\![0,n]\!]}(s - k)$ (pour cela, l'idée est un peu la même que dans la question **2.(a)**, $\mathbb{P}(X + Y = s) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = \ldots \text{ et } Y = y)$).

   À la fin, il faut distinguer des cas suivant que $s \leqslant n$ ou $s > n$.
4. Si $d = 0$, sur quel cas retombe-t-on ?

   Si $d \neq 0$, il faut commencer par $\mathbb{P}(D = d) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k \text{ et } X = d + k) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k \text{ et } Y = d + k)$ et calculer ces sommes comme dans les questions précédentes.