TD 32 Déterminants

Déterminant d'une matrice

Exercice 32.1. Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} j & j \\ -1 & j \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **4.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; **6.** $\begin{vmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix}$; **7.** $\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}$; **8.** $\begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **10.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; **11.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; **12.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

Indication 32.1. Il faut appliquer les méthodes du cours. Quand on a un déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, on sait conclure. Sinon, on peut développer par rapport à une ligne ou à une colonne (après éventuellement une simplification par pivot de Gauss).
Voici les réponses :

1. -1 ($j \in \mathbf{U}_3$, donc que vaut $1+j+j^2$?) ; **2.** 45 ; **3.** -1 ; **4.** 29 ;

5. 14 ; **6.** 4620 ; **7.** 27 ; **8.** 0 ;

9. 4 ; **10.** -15 ; **11.** 8 ; **12.** 0.

Exercice 32.2. Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Indication 32.2. Puisque M est antisymétrique, on a $\det(M^\top) = \det(-M)$. En calculant séparément ces deux valeurs, on peut conclure que $\det(M) = -\det(M)$ si l'ordre de la matrice est impair.

Exercice 32.3. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_3)$ n'est pas réduit à l'élément nul.
3. Pour chacune de ces valeurs, trouver une base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_3)$.
4. Vérifier que la réunion de ces bases fournit une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
5. Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Prouver sans calcul de produit matriciel que $P^{-1}AP$ est diagonale.
6. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'expression de A^k en fonction de k.

Indication 32.3. **1.** Méthode habituelle. Si vous faites un pivot, attention à ne pas choisir un pivot avec un λ, sinon il faut discuter et c'est long... Pour la suite, il faut factoriser le résultat (si vous vous y prenez bien dans le calcul du déterminant, vous pouvez directement aboutir à une forme factorisée).

2. $\operatorname{Ker}(A-\lambda I_3)=\{0\} \iff A-\lambda I_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ (pourquoi ?). Une fois cette équivalence acquise, il ne reste plus qu'à utiliser la caractérisation des matrices inversibles avec le déterminant donnée dans le cours.
3. Méthode habituelle pour trouver le noyau d'une matrice (il y a trois noyaux à déterminer, donc trois calculs indépendants à faire).
4. Possible avec un calcul de déterminant (c'est la méthode la plus efficace).
5. Il faut reconnaître une formule de changement de base essentiellement.
6. Calcul fait approximativement 1 200 421 fois (ou presque ☺).

. . . .

Exercice 32.4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On rappelle que la **trace** de A, notée $\operatorname{tr}(A)$, est la somme des éléments diagonaux de A.

1. Montrer que $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Supposons que $\det(A) \neq 0$. Déterminer une formule permettant de calculer A^{-1} qui utilise $\det(A)$, $\operatorname{tr}(A)$ et A.
3. Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, A^n.

Indication 32.4. 1. Il faut bêtement faire le calcul.

2. Il faut utiliser la définition de l'inversibilité (si on trouve une matrice B tel que $AB = I_2$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$).
3. Quand on connaît un polynôme annulateur P d'une matrice, on a déjà vu une méthode pour en déduire la puissance n-ième de la matrice. On rappelle qu'il faut chercher le reste la division euclidienne de X^n par P (le théorème de division euclidienne assure qu'il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ tels que $X^n = QP + \alpha + \beta X$; en évaluant en les racines de P on se ramène à la résolution d'un système de deux équations et d'inconnues α, β). Enfin, on remplace X par A : $A^n = Q(A)P(A) + \alpha + \beta A = \alpha + \beta A$.

. . . .

Exercice 32.5. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$ la matrice $M_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Indication 32.5. Il faut chercher une forme factorisée si vous voulez trouver facilement les racines du polynôme obtenu.

. . . .

Exercice 32.6. Soit a, b, c trois nombres complexes. Exprimer les déterminants suivants sous la forme la plus factorisée possible.

1. $\begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$;
2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$;
3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2a) & \cos(2b) & \cos(2c) \end{vmatrix}$;
5. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & c-a-b \\ 2a & b-c-a & 2c \\ a-b-c & 2b & 2c \end{vmatrix}$;
6. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{vmatrix}$ $(a \neq 0)$.

Indication 32.6. Pour ce type d'exercice, on ne fait pas toujours des pivots pour faire apparaître des zéros tout de suite. L'enjeu est surtout d'éviter d'avoir à choisir un pivot avec un paramètre (pour ne pas faire de longues discussions...) et parfois il faut une idée au départ !

1. Vous pouvez commencer par faire des opérations sur les colonnes pour que tous les coefficients de la première colonne soient les mêmes. Ensuite, vous pouvez factoriser par ce coefficient la première colonne (en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne).
2. Vous pouvez faire des opérations élémentaires sur les colonnes pour que la première ligne devienne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Idem.
4. Idem.
5. Idem. Pour avoir une forme factorisée à la fin, il ne faut pas tout de suite calculer le déterminant 2×2 obtenu. Il faut utiliser une formule de trigonométrie pour exprimer $\cos(2b)$ uniquement en fonction de $\cos(b)^2$ par exemple.

6. Vous pouvez commencer par faire des opérations sur les colonnes pour que tous les coefficients de la première colonne soient les mêmes. Ensuite, vous pouvez factoriser par ce coefficient la première colonne (en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne).
7. Si vous êtes observateurs, il n'a pas de calcul à faire.

. . . .

Exercice 32.7. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, note D_n le déterminant de la matrice d'ordre n de coefficients notés $d_{i,j}$ avec $d_{i,i} = 3$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_{i+1,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $d_{i,i+1} = 2$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $d_{i,j} = 0$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $j \notin \{i-1; i; i+1\}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$.
2. En déduire l'expression de D_n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

Indication 32.7. 1. Il faut développer par rapport aux lignes ou aux colonnes deux fois de suite (pas de pivot nécessaire ici).

2. Il faut reconnaître une suite usuelle. Les valeurs de D_1 et D_2 sont utiles : il faut calculer le déterminant d'une matrice 1×1 (!) et d'une matrice 2×2, ce qui n'est pas très coûteux.

. . . .

Exercice 32.8. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note d_n le déterminant de la matrice A_n d'ordre n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos(\theta) & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer d_1 et d_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $d_{n+2} = 2\cos(\theta) d_{n+1} - d_n$.
3. En déduire l'expression du terme général de la suite (d_n).

Indication 32.8. 1. Rien à signaler.

2. Il faut développer deux fois par rapport aux lignes ou au colonnes.
3. Suite usuelle. Attention, il faut discuter suivant la valeur de θ du nombre de solutions du polynôme caractéristique.

Déterminant d'une famille de vecteurs

. . . .

Exercice 32.9. 1. La famille $((1,3,2),(1,2,-1),(0,1,3))$ est-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

2. La famille $((1,-i,-1),(i,1,-i),(-1,i,1))$ est-elle une base de $\mathbf{C}^3$?
3. La famille $(1+X-X^2, 3-X+5X^2, -1+2X+3X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$?

Indication 32.9. Caractérisation des bases avec le déterminant. Les deux premières familles ne sont pas de base. La troisième famille est une base.

. . . .

Exercice 32.10. 1. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles la famille $((m+1, m-1), (4, m-1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

2. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles la famille $((m, m+1, 1), (4, m-1, 0), (1, 2, m))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Indication 32.10. Le problème revient à calculer des déterminant avec un paramètre. Il faut chercher à obtenir des formes factorisées sinon les calculs sont plus pénibles ensuite.

. . . .

Exercice 32.11. On se place dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Soit $P_1 = X^3$, $P_2 = (X+1)^3$, $P_3 = (X-1)^3$ et $P_4 = (X-2)^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

2. Calculer $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Indication 32.11. **1.** Il suffit de montrer qu'un certain déterminant est non nul.

2. Une formule dans le cours donne directement la réponse.

. . . .

Exercice 32.12 (*Déterminant de Vandermonde*). Pour tout $n \geqslant 2$ entier et tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, notons

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}$, $V(a_1, \ldots, a_{n+1}) = P(a_{n+1})V(a_1, \ldots, a_n)$, où $P = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$.

2. En déduire que pour tous $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$, $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

3. Soit $z_0, \ldots, z_n$ des complexes distincts. Montrer que la famille $((X - z_0)^n, \ldots, (X - z_n)^n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

Indication 32.12. **1.** Vous pouvez faire des opérations sur les colonnes.

2. Il faut utiliser la question précédente (quel type de raisonnement pourrions-nous bien faire ici ? ☺)

3. Il faut utiliser la caractérisation avec le déterminant et reconnaître un déterminant de Vandermonde.

Déterminant d'un endomorphisme

. . . .

Exercice 32.13. Calculer le déterminant de l'application linéaire suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1) \end{array}$$

Qu'en déduit-on sur f ?

Indication 32.13. Une fois le déterminant obtenu (il vaut -6), vous pouvez décider si f est un automorphisme ou non.

. . . .

Exercice 32.14. Soit λ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ défini par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)^2 P'' + (\lambda X + 1)P' + P \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit un automorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

Indication 32.14. Il faut chercher les valeurs de λ pour lesquelles un certain déterminant est non nul.