TD 31 — Utilisation des matrices en algèbre linéaire

Famille de vecteurs

Exercice 31.1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de cet espace vectoriel.

1. La famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est-elle une base de E ?
2. Même question avec la famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

Indication 31.1. Vous pouvez déterminer les matrices de ces familles dans une base quelconque puis chercher leur rang.

Représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 31.2. Déterminer les matrices relativement aux bases canoniques des applications linéaires ci-dessous, puis déterminer le rang de ces applications linéaires et en déduire si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, x - 3y) \end{array}$
2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, 2x - y + 3z, -y + z) \end{array}$
3. $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, y - z) \end{array}$
4. $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - 5y + 4z \end{array}$
5. $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$
6. $\varphi_6 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$
7. $\varphi_7 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y & z \\ z - y & x + y - z \end{pmatrix} \end{array}$
8. $\varphi_8 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & 2M + M^\top \end{array}$

Indication 31.2. Rien à signaler, la méthode est dans le cours.

Exercice 31.3. Posons $E = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto 1, \sin, \cos)$, sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie. En donner une base $\mathcal{B}$ et la dimension.
2. On définit sur E l'application u par $u(f) = f + f' + f''$. Montrer que u est un endomorphisme de E, et déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. u est-il un automorphisme de E ? Dans ce cas, expliciter u^{-1}.

Indication 31.3.

1. La dimension est au plus 3 (pourquoi ?). Pour montrer que la famille proposée est libre, vous pouvez vous donner une combinaison linéaire null et évaluer cette égalité de fonctions en plusieurs valeurs bien choisies.
2. Rapide.
3. Il faut chercher si la matrice obtenue avant est inversible. La méthode de Gauss répond à la question et donne au passage l'inverse en cas d'inversibilité.

Exercice 31.4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère l'application f_1 canoniquement associée à A. Calculer $f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.
2. On considère l'endomorphisme f_2 de $\mathbf{R}_2[X]$ dont B est la matrice relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Calculer $f_2(X^2 + 3X - 4)$.
3. On considère l'application f_3 de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice B relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ et à la base $b' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ où $(e_1, e_2, e_3) = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$. Calculer $f_3(3X^2 + 1)$.

Indication 31.4. Il faut faire le bon produit matriciel et la réponse est donnée (attention à bien écrire comme réponse des vecteurs de l'espace vectoriel sur lequel vous travaillez : si vous êtes dans un espace de polynômes, il faut un polynôme à la fin !).

. . . .

Exercice 31.5. On considère les deux applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (2y, -x+3y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (2x-2y, x-y) \end{array}$$

1. Donner les matrices A et B de f et g relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^2$.
2. Calculer AB et BA. Que peut-on en déduire sur f et g ?
3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. En déduire que f est inversible et expliciter f^{-1}.
4. Donner sans démonstration la valeur de B^n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$. Que peut-on en déduire sur g ?

Indication 31.5.
1. Rien à signaler.
2. Rien à signaler pour le produit de matrice. Á quelle opération sur les fonctions correspond un produit de matrices ?
3. Rien à signaler.
4. Calculer B^2 pour conjecturer toutes les puissances de B. Comment l'égalité avec B^2 se traduit-elle en terme de fonctions ? C'est cette observation qui permet de reconnaître la nature de l'endomorphisme g.

. . . .

Exercice 31.6.
1. On considère l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-5x+3y, -14x+8y). \end{array}$

   Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ de $\mathbf{R}^2$ pour laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si une telle base $\mathcal{B}$ existe, que valent $f(u_1)$ et $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2 ?
   (b) Résoudre l'équation $f((x,y)) = (x,y)$. En déduire un candidat pour le vecteur u_1.
   (c) En résolvant une autre équation déterminer un candidat pour le vecteur u_2.
   (d) Conclure.
2. En procédant de même, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de l'endomorphisme

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x+y-3z\,,\, x+5y-3z\,,\, 2x+2y-2z) \end{array}$$

   est $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication 31.6.
1. (a) Rien à signaler.
   (b) Rien à signaler.
   (c) Rien à signaler.
   (d) Si la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, c'est gagné ! (pourquoi ?)
2. Relisez bien ce qui a été fait avant et reproduire la stratégie adoptée.

. . . .

Exercice 31.7. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle **trace** de A le nombre : $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Nous avons montré que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (voir TD sur les matrices).

1. Montrer que si M et N sont deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, alors $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(N)$.
2. On définit l'application $f : \begin{array}{ccl} \mathbf{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & (-29-31X)P(0)+(12+13X)P(1) \end{array}$. C'est un endomorphisme de $\mathbf{R}_1[X]$ (on ne demande pas de le montrer). Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}_1[X]$.
3. On cherche désormais une base de $\mathbf{R}_1[X]$ telle que la matrice représentative de f dans cette base soit $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans cette base.
   (a) Déterminer l'ensemble des polynômes invariants par f. En déduire une valeur possible de λ.
   (b) Que peut alors valoir μ ?
   (c) Déterminer la base recherchée et conclure.

Indication 31.7.
1. Il faut utiliser la formule de changement de base ainsi que le rappel sur la trace d'un produit de matrices.
2. Rien à signaler.
3. (a) Il faut résoudre $f(P) = P$ d'inconnue $P \in \mathbf{R}_1[X]$ et présenter l'ensemble des solutions sous la forme d'un espace engendré. Il faut réfléchir à ce que vous venez de faire pour en déduire λ.
   (b) La trace est utile ici.
   (c) Il faut reproduire ce qui a été fait dans **3.(a)**.

. . . .

Exercice 31.8. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Donner la matrice M de f dans cette base.
3. Que vaut M^n ?

Un tel endomorphisme est dit **nilpotent** *d'indice n (l'indice est le plus petit entier k tel que $f^k = 0$).*

Indication 31.8.
1. Si $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbf{K}$ sont tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$, qu'obtient-on après avoir composé par f^{n-1} ? Il faut reproduire cette méthode pour en déduire que la famille $\mathcal{B}$ est libre, puis conclure que c'est une base avec un argument de dimension.
2. Immédiat.
3. Rien à signaler.

. . . .

Exercice 31.9. Soit λ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ défini par :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)^2P'' + (\lambda X + 1)P' + P \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit un automorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

Indication 31.9. Vous pouvez utiliser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que cette matrice soit inversible (il n'y a pas beaucoup de calculs à faire !).

. . . .

Exercice 31.10. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $f^2 = 0$. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication 31.10. **1.** Par quelle opération sur les matrices se traduit une composition d'applications linéaires ? Le cours donne ensuite des méthodes pour trouver une base de $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$, ce qui donne $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

2. On pourra faire l'analyse au brouillon : si une telle base (e_1, e_2, e_3) existe, que peut-on dire des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$?

. . . .

Exercice 31.11. On considère l'application linéaire u de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est de rang 3.

2. Construire une base e de $\mathbf{R}^4$ et une base f de $\mathbf{R}^3$ telles que la matrice représentant u dans les bases e et f soit donnée par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication 31.11. **1.** La méthode de Gauss appliquée à M donne rapidement la réponse.

2. Si on note (e_1, e_2, e_3, e_4) et (f_1, f_2, f_3) les bases cherchées (de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$ respectivement), que doit vérifier $u(e_4)$? Donc quel choix de e_4 peut-on faire ? Pour e_1, e_2, e_3 vous pouvez choisir les trois premiers vecteurs de la base canonique par exemple et en déduire des choix de f_1, f_2, f_3.

. . . .

Exercice 31.12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ défini par $\phi(M) = AM - MA$.

1. Expliciter la matrice de ϕ relativement à la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Déterminer le noyau et l'image de ϕ, leur dimension, et une base de chacun d'eux.

3. Justifier que $\operatorname{Ker} \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

4. Déterminer la matrice de ϕ dans une base adaptée à $\operatorname{Ker} \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

Indication 31.12. **1.** Il faut appliquer la méthode habituelle. Puisque $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbf{R})) = 4$, vous devez obtenir une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ à la fin.

2. Vous pouvez déterminer le noyau et l'image de la matrice.

3. Vous pouvez utiliser une des caractérisations des espaces supplémentaires (par exemple que l'intersection est réduite à $\{0\}$ et utiliser les dimensions pour conclure).

4. On rappelle qu'une base adaptée est une concaténation des bases de chaque espace supplémentaire.

Changement de bases

. . . .

Exercice 31.13. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les familles suivantes :

$$\mathcal{B} = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)).$$

Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbf{R}^3$, et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Indication 31.13. Rien à signaler.

. . . .

Exercice 31.14. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On introduit les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (2,1,2), \qquad v_2 = (0,1,3), \quad \text{et} \quad v_3(2,0,3).$$

Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et, à l'aide des formules de changement de base, déterminer la matrice de f dans cette base.

Indication 31.14. Rien à signaler.

. . . .

Exercice 31.15. On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ est la matrice

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 3 \\ -4 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

On considère la famille $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (2,1,1)$, $e_2 = (1,2,0)$ et $e_3 = (1,1,2)$

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.
3. Sans utiliser de matrice de passage, donner la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}_1$.
4. Donner une relation entre D, A et P.
5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer A^n.

Indication 31.15.

1. Vous pouvez la matrice de $\mathcal{B}_1$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ par exemple.
2. Rien à signaler.
3. Il faut chercher les images des vecteurs proposés à l'aide d'un produit de matrices.
4. Formule de changement de base.
5. Classique : il faut élever à la puissance n la relation obtenue à la question précédente et faire le produit de matrices.

. . . .

Exercice 31.16. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dont la matrice relativement à une base $\mathcal{B}$ de E est une matrice scalaire $A = \lambda I_n$.
Montrer que A est la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

Indication 31.16. Il faut se donner une matrice base de E, faire un changement de base et interpréter le résultat obtenu.

. . . .

Exercice 31.17. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3, 3e_2 - e_3, 2e_1 - e_2)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f vérifiant

$$f(e_1 + e_3) = 2e_2 \qquad f(3e_2 - e_3) = 7e_1 - e_2 + 6e_3 \qquad f(2e_1 - e_2) = 4e_1 + 2e_2 + 6e_3.$$

3. En déduire à l'aide des formules de changement de base la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Indication 31.17.

1. Vous pouvez calculer le rang d'une certaine matrice par exemple.
2. Rien à signaler.
3. Rien à signaler.

Endomorphismes remarquables

. . . .

Exercice 31.18. On note f l'application définie sur $\mathbf{R}_3[X]$, à valeurs dans $\mathbf{R}_3[X]$, qui à un polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par $X^2 - X + 1$.

1. Vérifier que f est linéaire.

2. Déterminer sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$, et vérifier, avec celle-ci, que f est un projecteur.

3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Indication 31.18. **1.** Il faut montrer la linéarité « à la main ». Pour cela, une fois $P_1, P_2 \in \mathbf{R}_3[X]$ fixés, il pourra être utile d'introduire les quotients/restes de la division de P_1 (resp. P_2) par $X^2 - X + 1$.

2. Il faut chercher les images des vecteurs de la base canonique, donc faire quatre divisions euclidiennes (les trois premières sont immédiates).

3. Rien à signaler.

. . . .

Exercice 31.19. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Indication 31.19. Il faut calculer A^2 (pourquoi ?). Ensuite, on rappelle que la symétrie est par rapport à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Vous pouvez donc chercher par un calcul matriciel $\mathrm{Ker}(A + I_4)$ et $\mathrm{Ker}(A - I_4)$.

. . . .

Exercice 31.20. Soit $F = \left\{ x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x = z \right\}$ et G la droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ engendrée par le vecteur $u = (1, 0, -1)$.

1. Déterminer une base (v, w) de F, et vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

2. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Donner la matrice de p relativement à la base (u, v, w).

3. En déduire la matrice de p relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Indication 31.20. **1.** Relire le cours sur les espaces vectoriels de dimensions finies si besoin.

2. Le résultat est très simple.

3. Changement de base !

. . . .

Exercice 31.21. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2. Montrer que la concaténée b de la base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de la base de $\mathrm{Im}(f)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. En déduire que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

3. Donner la matrice de f dans la base b (sans utiliser de matrices de passage).

4. Décrire f comme la composée de deux endomorphismes très simples.

Indication 31.21. **1.** Le plus simple est peut-être de faire un pivot sur les colonnes (pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(A)$) en gardant en mémoire les vecteurs dont on écrit l'image (pour obtenir un ou des vecteurs du noyau).

2. Vous pouvez calculer le rang de la matrice associée à la famille de vecteurs dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ par exemple.

3. Il faut calculer les images de la base b par f (avec un produit de matrices).

4. Vous pouvez remarquer que

$$\mathrm{M}_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times 3I_3$$

La matrice matrice correspond à une projection (sur quel espace ? suivant quelle direction ?) et la seconde à une homothétie.

Exercice 31.22. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que f est un projecteur si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ où le nombre de 1 est dans $[\![0, n]\!]$.
2. Montrer que f est une symétrie si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ où le nombre de 1 est dans $[\![0, n]\!]$.

Indication 31.22. **1.** Il faut travailler par double implication.

- $\boxed{\Rightarrow}$. Que se passe-t-il si f est l'identité ? si f est l'application nulle ?
  Supposons que f ne soit ni l'identité, ni l'application nulle. Il existe F, G des sous-espaces vectoriels supplémentaires tels que f soit la projection sur F parallèlement à G. Il faut ensuite introduire des bases et donner la matrice de f dans ces bases.
- $\boxed{\Leftarrow}$. Plus simple, il suffit de vérifier que $f^2 = f$ avec un calcul de matrices.

2. Mêmes idées.

Noyau, image, rang d'une matrice

Exercice 31.23. Déterminer une base du noyau et de l'image des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; **4.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication 31.23. Des méthodes sont dans le cours (avec des pivots sur les lignes ou les colonnes, au choix !).

Exercice 31.24. Soit $m \in \mathbf{R}$. Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; **2.** $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$

Indication 31.24. Il faut faire des pivots de Gauss et compter les pivots obtenus (attention quand il y a des paramètres, on rappelle qu'on ne peut pas choisir un pivot égal à 0 !)