TD 30 — Ensembles finis et dénombrement

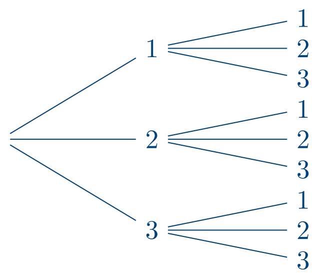
Dénombrement

Exercice 30.1. Dénombrer les nombres de 4 chiffres écrits uniquement avec les chiffres 1, 2 et 3.

Indication 30.1. Une stratégie peut être de choisir successivement le premier chiffre, puis le deuxième, etc. :

$$\underbrace{??}_{\text{choix du 1er chiffre}} \times \underbrace{??}_{\text{choix du 2e chiffre}} \times \underbrace{??}_{\text{choix du 3e chiffre}} \times \underbrace{??}_{\text{choix du 4e chiffre}} = ??$$

Pour s'aider, il peut être utile d'utiliser un arbre, même incomplet, pour comprendre comment raisonner. Par exemple, pour un code à deux chiffres, on a :



Exercice 30.2. Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9. On tire quatre boules de l'urne. Dénombrer le nombre de tirages possibles dans les trois cas suivants :

1. les tirages sont successifs et sans remise ;
2. les tirages sont successifs et avec remise ;
3. les tirages sont simultanés.

Indication 30.2. Rien de particulier, il faut utiliser des listes, des arrangements ou des combinaisons suivant la question.

Exercice 30.3. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former en utilisant uniquement les lettres du mot PARIS, sans répétition ? Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot PARIS existe-t-il ? Reprendre cette dernière question avec le mot BILLE, puis avec le mot ESCARPOLETTE.

Indication 30.3. Pour choisir les mots de 3 lettre qu'on peut former avec les lettres de PARIS, on peut procéder ainsi : on commence par choisir trois lettres (simultanément !), puis on assemble le mot.
La méthode pour dénombrer des anagrammes est dans le cours.

Exercice 30.4. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de quatre familles : pique, cœur, carreau et trèfle, chacune constituée de huit cartes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7. On tire successivement et sans remise huit cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages contiennent au moins un as ?
3. Combien de tirages comprennent au moins un pique ou une dame ?

4. Combien de tirages contiennent exactement 2 rois ?

Indication 30.4. **1.** Arrangements, listes ou combinaisons ? Combien d'éléments dans l'ensemble dans lequel on pioche ?

2. Notons E le nombre total de tirages et A le nombre de tirages sans as. Vous pouvez commencer par chercher $\mathrm{Card}(\overline{A})$. C'est comme avant, sauf qu'ici l'ensemble dans lequel on pioche ne contient pas d'as.

3. Même idée qu'à la question précédente, mais attention à ne pas compter deux fois la dame de pique !

4. Il faut choisir (simultanément) la place des rois, puis compter les rois et enfin compter les autres cartes.

. . . .

Exercice 30.5. Dans un jeu de 32 cartes, on choisit (simultanément) cinq cartes au hasard.

1. Quel est le nombre total de mains que l'on peut obtenir ? (une main désigne les cartes détenues par le joueur)
2. Combien de ces mains contiennent l'as de pique ?
3. Combien de ces mains contiennent exactement 4 as ?
4. Combien de ces mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ?
5. Combien de ces mains contiennent au moins un as ?
6. Combien de cas mains contiennent au moins 3 rois ?
7. Combien de ces mains contiennent exactement 2 as et 2 carreaux ?
8. Combien de ces mains sont bicolores (c'est-à-dire qu'il y a au moins une carte rouge et au moins une carte noire) ?
9. Combien de ces mains contiennent 2 piques et 3 carreaux ?

Indication 30.5. *Remarque importante :* Une main est l'ensemble des cartes tirées. Il n'y a pas d'ordre dans une main. Cela vous aide à décider s'il faut utiliser des listes, des arrangements et des combinaisons.

1. Rien à signaler.
2. Vous pouvez appliquer le principe multiplicatif, en commençant par choisir l'as de pique (pas beaucoup de choix ☺) puis la carte restante.
3. Vous pouvez appliquer le principe multiplicatif, en commençant par choisir les quatre as (simultanément) puis la carte restante.
4. Même principe que pour la question précédente.
5. Vous pouvez passer au complémentaire.
6. Au moins 3, c'est exactement 3 ou exactement 4. Notons B l'ensemble des tirages avec au moins 3 rois, B_3 (resp. B_4) l'ensemble des tirages avec exactement 3 (resp. 4) rois. Alors $B = B_3 \cup B_4$.

ATTENTION

Voici une stratégie tentante, mais fausse : choisir d'abord 3 rois pour être certain d'en avoir au moins 3, et ensuite choisir deux cartes quelconques (quitte à choisir encore un roi). Cette approche est fausse car en procédant ainsi on compte plusieurs fois la même main. Par exemple, la main 4 rois et la dame de cœur est décrite par :

- choix des trois rois : roi de carreau, de pique et de trèfle ;
- choix des deux cartes restantes : roi de cœur, dame de cœur).

mais aussi par :

- choix des trois rois : roi de carreau, de pique et de cœur ;
- choix des deux cartes restantes : roi de trèfle, dame de cœur).

La même main est donc comptée plusieurs fois !

7. Il faut disjoindre suivant que l'as de carreau est choisi ou pas.
8. Vous pouvez utiliser les notations : N (resp. R) l'ensemble des tirages avec uniquement des cartes noires (resp. rouges) et B l'ensemble des tirages bicolores. Il faut commencer par essayer d'exprimer B avec N et R.
9. Rien de particulier.

. . . .

Exercice 30.6. Huit chevaux, numérotés de 1 à 8, s'affrontent dans une course hippique.
Un pari consiste à donner l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux, par exemple $(3, 5, 2)$. On gagne le tiercé lorsque l'on donne les bons chevaux du trio de tête dans le bon ordre d'arrivée et on gagne le tiercé dans le désordre lorsque l'on donne le bon trio de tête mais pas dans l'ordre d'arrivée. Dans les autres cas, on ne gagne rien.

1. Combien y a-t-il de paris possibles ?
2. On vient de faire notre pari. Combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles pour les 8 chevaux, où l'on gagne quelque chose ?
3. Quel est le nombre minimum de paris qu'il faut faire pour être sûr de gagner quelque chose ?

Indication 30.6. On donne ici les réponses, pour que vous puissiez vérifier vos réponses.

1. 336.
2. 6.
3. 56.

. . . .

Exercice 30.7. Douze livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Parmi ceux-ci, trois constituent les trois tomes d'un roman.

1. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, dans l'ordre (de gauche à droite : tome 1, 2 puis 3) ?
2. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, mais pas forcément dans l'ordre ?

Indication 30.7.

1. Il faut faire attention : le tome 1 ne peut pas être placé dans les deux dernières positions. Une fois le tome 1 placé, il ne reste plus qu'une seule possibilité pour placer les tomes 2 et 3 (puisqu'ils doivent suivre le tome 1). Il reste donc à compter les positions possibles pour les autres livres et à appliquer le principe multiplicatif pour conclure.
2. Le plus simple semble de partir de la configuration précédente et de mélanger les trois tomes (il y a bien sûr d'autres approches !)

. . . .

Exercice 30.8. Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et sept boules noires numérotées de 1 à 7. On effectue quatre tirages successifs et avec remise. Dénombrer

1. les différents tirages possibles ;
2. les tirages amenant quatre boules rouges ;
3. les tirages amenant au moins une boule rouge ;
4. les tirages amenant trois boules rouges et une boule noire ;
5. les tirages bicolores.

Reprendre chacune de ces questions dans le cas de tirages successifs et sans remise, puis dans le cas de tirages simultanés.

Indication 30.8. Le « type » de tirages permet de décider s'il faut utiliser des listes, des arrangements ou des combinaisons.

1. Rien à signaler.
2. On ne pioche que parmi les boules rouges.
3. Complémentaire.
4. Stratégie étape par étape : position de la boule noir (si l'ordre a une importance), puis choix de la boule noire, puis choix des boules rouges).
5. Complémentaire.

. . . .

Exercice 30.9. Soit $n, p \in \mathbf{N}^\star$ tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue un tirage de p boules. Les tirages sont successifs et avec remise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins deux fois le même numéro ?
4. Combien y a-t-il de tirages où exactement 2 numéros sont apparus ?

Indication 30.9. Toujours les mêmes questions : objets distincts ? ordonnés ?

1. Cours.
2. Dénombrer les tirages qui ont même premier et dernier numéro.

   Solution : $n^{p-1}\dfrac{n-1}{2}$.
3. Utiliser 2).

   Solution : $n^p - \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
4. Commencer par se demander quelles sont les options pour ces deux numéros.

   Solution : $\dbinom{n}{2}2^p - n(n-1)$.

. . . .

Exercice 30.10. Soit A un ensemble fini de cardinal n, et B une partie de A de cardinal p. Dénombrer les parties X de A vérifiant $B \subset X \subset A$.

Indication 30.10. Vous pouvez raisonner en deux étapes : choisir tous les éléments de B, puis choisir une partie de $A \backslash B$.

. . . .

Exercice 30.11. On répartit n boules indiscernables dans trois boîtes différentes. Combien y a-t-il de répartitions telles que deux boîtes exactement contiennent des boules ?

Indication 30.11. Vous pouvez adopter la stratégie par étapes suivantes : choisir la boîte vide, choisir le nombre de boules pour la première boîte non vide (attention à ne pas y mettre toutes les boules !) et choisir le nombre de boules pour la second boîte non vide (elle reçoit toutes les boules restantes, il n'y a pas beaucoup de façons de faire !).

. . . .

Exercice 30.12.

1. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?
2. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?
3. Combien y a-t-il de listes formant une suite de 5 chiffres strictement croissantes ?
4. Une liste palindrome est une liste qui se lit de la même façon à l'endroit ou à l'envers, comme 12321 ou 052250. Combien y a-t-il de listes palindromes à 15 chiffres ?

Indication 30.12.

1. Il faut choisir la place du 0, puis la valeur des quatre autres chiffres.
2. Il faut trouver les cardinaux des ensembles A_i formés des listes où un chiffre et un seul est répété i fois, pour tout $i \in [\![2, 5]\!]$. Pour dénombrer A_2 par exemple, vous pouvez choisir la place des deux chiffres répétés, la valeur des chiffres répétés puis la valeur des autres chiffres (attention à ne pas reprendre le chiffre répété).
3. Vous pouvez procéder en deux temps : choisir simultanément 5 chiffres distincts puis les ranger.
4. Il faut choisir 7 chiffres au début et un chiffre central (les autres sont alors déterminés de manière unique pour que la liste soit un palindrome).

. . . .

Exercice 30.13. On dispose dix jetons portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec ?
2. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire où B, A et C apparaissent dans ce ordre et côte à côte ?

Indication 30.13.

1. Rien de particulier.

2. Attention, le B ne peut pas être en position 9 par exemple (car il n'y a plus la place pour écrire BAC dans ce cas).

. . . .

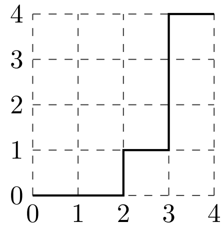
Exercice 30.14. Dénombrer les couples (A, B) de parties d'un ensemble E à n éléments tels que $A \cap B = \varnothing$.

Indication 30.14. Raisonner par élément de E. Où peut-il être lorsque l'on construit les couples (A, B) ?

. . . .

Exercice 30.15. On se place dans le plan muni du quadrillage $\mathbf{N}^2$. On ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(2, 2)$?
2. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(4, 4)$?
3. Parmi ces chemins, combien y en a-t-il passant par le point $(1, 2)$?



Indication 30.15. Vous pouvez coder les déplacements vers le haut par un H et les déplacement vers la droite par un D.

1. Combien de D et combien de H pour aller de $(0, 0)$ à $(2, 2)$? Il reste à compter des anagrammes !
2. Idem.
3. Idem, mais en deux temps.

. . . .

Exercice 30.16. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y = n$ dans $\mathbf{N}^2$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y + z = n$ dans $\mathbf{N}^3$.
3. On décide de représenter les solutions de $x + y + z = n$ dans $\mathbf{N}^3$ de la manière suivante : une solution (x, y, z) est codée par le mot binaire comportant des séquences de x, y et z chiffres 1 séparées par le chiffre 0 : par exemple, pour $n = 6$, la solution $(2, 1, 3)$ sera codée par le mot binaire 11010111.
   Retrouver le résultat de la question 2 en utilisant cette représentation des solutions.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ dans $\mathbf{N}^p$.
5. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ dans $(\mathbf{N}^\star)^p$.
6. Combien y a-t-il de façons de ranger n objets indiscernables dans n tiroirs différents ?

Indication 30.16.

1. On peut appliquer le principe multiplicatif : on choisit d'abord x, puis y. Notez qu'une fois x choisi, on a y qui est déterminé puisque $y = n - x$ (il n'y a alors qu'un seul choix possible pour y !).
2. La question revient à chercher le cardinal de l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{N}^3 | x + y + z = n\}$. On peut distinguer suivant la valeur de x :
   $$E = \bigcup_{k=0}^{n} \{ (k, y, z) \mid y + z = n - k \}$$
   les ensembles écrits étant deux à deux disjoints.
3. C'est un problème d'anagrammes (voir cours !).
4. Il faut utiliser la représentation de la question précédente. On se ramène alors à un problème d'anagrammes.
5. On peut prendre la même représentation d'une solution qu'à la question précédente. Comme les x_i sont tous non nuls, on ne peut avoir de 0 consécutifs : chaque 0 est obligatoirement suivi d'un 1 : cela forme un "bloc" 01 ; de plus, le mot binaire ne peut ni commencer ni terminer par un zéro. On doit placer ? blocs 01, et il y a ?? places possibles. Il y a donc $\binom{??}{?}$ solutions dans $(\mathbf{N}^\star)^p$.
6. C'est une application des questions précédentes.

. . . .

Exercice 30.17. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. **(a)** En descendant les marches d'un escalier par une ou deux à la fois, de combien de façons peut-on descendre un escalier à 12 marches ? On exprimera la réponse à l'aide d'une somme.
   (b) Même question pour un escalier à 13 marches.
   (c) Généraliser au cas d'un escalier à n marches.
2. On propose dans cette question une autre approche pour déterminer le nombre de façon de descendre un escalier à n marches (toujours en autorisant des pas de une ou de deux marches). On notera M_n ce nombre.
   (a) Calculer M_1, M_2 et M_3.
   (b) Montrer en considérant le dernier pas, que
   $$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}.$$
   (c) En déduire la valeur de M_n pour tout entier n strictement positif.

Indication 30.17. **1.** Notons 1 à chaque pas de une marche, et 2 pour chaque pas de 2 marches. La descente de l'escalier est représentée par un mot formé des chiffres 1 et 2. Pour un escalier de 12 marches : dénombrons selon le nombre de pas de deux marches. Il y en a au plus 6 possibles. Il faut ensuite disjointe suivant le nombre de pas de deux marches (il y a donc 6 cas à disjoindre). Pour chaque cas, on se ramène à un problème d'anagramme (où les mots sont formés de 1 et de 2).
2. **(a)** $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ et $M_3 = 3$.
   (b) Faire une disjonction de cas selon le nombre de marches du dernier pas.
   (c) Le résultat final est pénible à écrire, n'hésitez pas à introduire des notations !

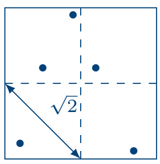
. . . .

Exercice 30.18 (*Principe des tiroirs de Dirichlet*). Quand on doit ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.

1. Démontrer que si on connaît trois entiers, alors deux au moins sont de même parité.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère un ensemble de $n+1$ entiers choisis parmi 1, 2, 3,..., $2n$. Montrer qu'il existe deux entiers de cet ensemble dont la somme vaut $2n+1$ (exemple avec $n = 5$: choisissez 6 entiers distincts entre 1 et 10 ; il y en a deux dont la somme vaut 11).
3. Montrer que, parmi les Lorrains chevelus, il en existe au moins deux avec exactement le même nombre de cheveux. On considérera qu'un individu possède au plus 300 000 cheveux, et qu'il y a environ 2 300 000 habitants chevelus en Lorraine.
4. Étant donné cinq points dans un carré d'arête 2, montrer qu'on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.

Indication 30.18. Pour chaque question, il faut imaginer ranger des objets dans des tiroirs.

1. Considérer un tiroir des nombres pairs et un tiroir des nombres impairs.
2. Avec les entiers compris entre 1 et $2n$, on peut former n tiroirs : ce sont les paires d'entiers dont la somme vaut $2n+1$, *i.e.* les paires $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n-1\}$,..., $\{n, n+1\}$.
3. Un tiroir par nombre de cheveux !
4. On peut couper le carré en quatre :



Applications entre ensembles finis

. . . .

Exercice 30.19. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.

1. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans E.
2. Déterminer le nombre d'applications de E dans E qui ne sont pas surjectives.
3. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$.

4. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0,1,2\}$.

Indication 30.19. **1.** Le cardinal au départ et à l'arrivée est le même : que peut-on dire d'une application surjective dans ce cas ?

2. Complémentaire.

3. Vous pouvez dénombrer le nombre total d'applications et ôter celles qui ne sont pas surjectives (il n'y en a pas beaucoup ☺).

4. Il faut généraliser l'idée de la question d'avant (mais c'est plus difficile !). Les applications non surjectives ont pour ensemble image :

$$\{0\} \qquad \{1\} \qquad \{2\} \qquad \{0,1\} \qquad \{0,2\} \qquad \{1,2\}$$

....

Exercice 30.20. Soit $(n,p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Indication 30.20. Pour construire une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, on choisit simultanément les images des éléments de $[\![1,p]\!]$ puis on les range dans l'ordre croissant.

....

Exercice 30.21. **1.** Soit E et F deux ensembles finis et $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,E)$. Montrer que si u et v sont injectives alors u et v sont bijectives.

2. Plus généralement, soit E_1,...,E_n des ensembles finis. Soit $u_1,\dots,u_n$ des applications injectives telles que pour $i \in [\![1,n-1]\!]$, $u_i \in \mathcal{F}(E_i,E_{i+1})$ et $u_n \in \mathcal{F}(E_n,E_1)$. Montrer que les applications $u_1,\dots,u_n$ sont bijectives.

Indication 30.21. Que peut-on dire des cardinaux des ensembles en présence ?

....

Exercice 30.22. Pour tous entiers strictement positifs n et p, on note E_n^p l'ensemble des p-uplets croissants formés avec des éléments de $[\![1,n]\!]$. On cherche à calculer le cardinal k_n^p de E_n^p.

1. *Une première méthode.* On fixe deux entiers strictement positifs n et p et on note S_n^p l'ensemble des p-uplets strictement croissants formés avec des éléments de $[\![2,n+p]\!]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E_n^p & \longrightarrow & S_n^p \\ (a_1,a_2,\dots,a_p) & \longmapsto & (a_1+1,a_2+2,\dots,a_p+p) \end{array}.$$

(a) Vérifier que φ est correctement définie, autrement dit l'image par φ de tout élément de E_n^p appartient bien à S_n^p.

(b) Montrer que φ est une bijection.

(c) Déterminer le cardinal de S_n^p et en déduire celui de E_n^p.

2. *Une seconde méthode.*

(a) Calculer k_n^1 et k_1^p pour tous entiers n et p strictement positifs.

(b) Montrer que pour tous entiers $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$:

$$k_n^p = k_n^{p-1} + k_{n-1}^p.$$

(c) En déduire que pour tous entiers n et p strictement positifs,

$$k_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Indication 30.22. *Méthode 1 :*

1. Direct. Bien écrire tout ce que l'on sait sur les éléments de E_n^p.

2. Donner la bijection réciproque. Attention, il ne faut pas oublier de montrer qu'elle est bien définie.

3. S'inspirer de l'exemple du cours sur les triplets de $[\![1,10]\!]$ croissants.

Méthode 2 :

1. $k_n^1 = n$ et $k_1^p = 1$.

2. Séparer les éléments de E_n^p en deux sous-ensemble selon leur dernière coordonnée.
3. Il faut récurer, sauf qu'il y a deux indices ici. Une technique est d'imbriquer deux récurrences. (Récurrence-ception)

Démonstrations par des méthodes combinatoires

Exercice 30.23. Soit $n \in \mathbf{N}$. Dénombrer de deux façons les parties d'un ensemble à n éléments. En déduire l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Indication 30.23.
- Première façon : pour construire une partie A de E, on choisit pour chaque élément de E s'il est dans A ou non.
- Deuxième façon : dénombrer les parties de E suivant leur nombre d'éléments.

Exercice 30.24 . On considère trois entiers naturels n, p et q, l'entier n étant inférieur ou égal aux deux autres. Démontrer l'identité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k}$$

d'une part par un raisonnement combinatoire, d'autre part en utilisant le polynôme $(1+X)^p \cdot (1+X)^q$.

Indication 30.24 . Méthode combinatoire : Dénombrer les parties de $[\![1, p+q]\!]$, en distinguant les cas selon le nombre d'éléments dans $[\![1, p]\!]$ et dans $[\![p+1, q]\!]$.

Méthode polynômiale : Binôme de Newton.

Exercice 30.25. Soit $n, p \in \mathbf{N}^\star$ tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue un tirage de p boules. Les p boules sont extraites simultanément.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit $k \in \mathbf{N}^\star$ tel que $p \leqslant k \leqslant n$. Déterminez le nombre de tirages tels que le plus grand numéro tiré est k.
3. Déduire des deux questions précédentes que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

Indication 30.25.
1. Cours.
2. $\displaystyle\binom{p-1}{k-1}$.
3. Disjonction de cas selon le plus grand numéro tiré.

Exercice 30.26. Soit n, p deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$. Le but de l'exercice est de montrer, de trois manières différentes, que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

1. Simplifier le produit des coefficients binominaux et utiliser l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 2^p$.
2. Montrer l'égalité demandée en remarquant que $((1+X)+X)^n = (1+2X)^n$.
3. Montrer l'égalité demandée en dénombrant de deux façons différentes l'ensemble des couples (A, B) de parties d'un ensemble E de cardinal n, vérifiant $\text{Card}(B) = p$ et $A \subset B$.

Indication 30.26.
1. Il faut revenir à la formule avec un quotient pour simplifier le produit des coefficients binomiaux.

2. Il faut appliquer deux fois la formule du binôme de Newton pour obtenir

$$((1+X)+X)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} X^i.$$

On conclut ensuite par identification.

3. Première façon de compter :

- on choisit une partie B de E de cardinal p ;
- on choisit A tel que $A \subset B$: cela revient à choisir une partie de B.

Seconde façon de compter :

- on choisit les éléments de A ;
- il reste à choisir les éléments de B qui ne sont pas dans A.