TD 29 — Applications linéaires

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 29.1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $a : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, 3x-z-1) \end{array}$;

2. $b : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, x+5y) \end{array}$;

3. $c : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$;

4. $d : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ P & \longmapsto & P(0)+P'(1) \end{array}$;

5. $e : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P^2 \end{array}$;

6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^3 & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ (a_0,a_1,a_2) & \longmapsto & a_0+a_1X+a_2X^2 \end{array}$;

7. $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ u & \longmapsto & (\mathfrak{R}e(u(0)), |u(1)|) \end{array}$;

8. $h : \begin{array}{ccc} D^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\ u & \longmapsto & u+u' \end{array}$;

9. $i : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ u & \longmapsto & (nu_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$;

10. $j : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$;

11. $k : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0)) \end{array}$;

12. $\ell : \begin{array}{ccc} \left\{u\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ converge}\right\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$.

Indication 29.1.
1. Rien à signaler.
2. Rien à signaler.
3. L'application n'est pas linéaire : vous pouvez trouver (x,y) et (x',y') tels que $c(x,y)+c(x',y')=0$ et $c(x+x',y+y')=1$.
4. Rien à signaler.
5. Il y a un carré, donc l'application ne semble pas linéaire !
6. La linéarité est rapide. En considérant les ensembles de départ et d'arrivée, que pouvez-vous dire quant à la surjectivité de l'application ? Pour l'injectivité, un calcul de noyau est rapide !
7. L'application n'est pas linéaire.
8. Question plus difficile. La linéarité est rapide. Pour l'injectivité, un calcul de noyau donne la réponse (il faut résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène).
   On peut montrer que l'application n'est pas surjective. Le cours sur les équations différentielles assure que pour tout H continue, l'équation $y'+y=H$ admet une solution : il faut donc considérer une application non continue pour espérer qu'elle n'ait pas d'antécédent. Par exemple, vous pouvez montrer que pour
   $$H : x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$
   l'équation $y'+y=H$ n'a pas de solution (cela prend un peu de temps : il faut résoudre l'équation sur $\mathbf{R}_-^\star$, sur $\mathbf{R}_+^\star$ et tenter de recoller les solutions - ce qui n'est pas possible).
9. La linéarité est rapide. L'application n'est ni injective ni surjective.
10. La linéarité est rapide. L'application n'est pas injective (le plus simple est de trouver un élément non nul dans le noyau) mais elle est surjective.
11. La linéarité est rapide. On peut déterminer le noyau pour la non injectivité. Pour la surjectivité, on peut soit utiliser le théorème du rang soit construire un antécédent de $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ (avec Taylor !).
12. La linéarité est rapide. Pour la non injectivité, vous pouvez déterminer le noyau par exemple. La surjectivité n'est pas très longue à obtenir.

. . . .

Exercice 29.2. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Développer $(u+v)^2$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(u+v)^2 = u^2 + 2u \circ v + v^2$.

3. Donner une condition suffisante pour que $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2 \circ v + 3u \circ v^2 + v^3$.

4. Donner une condition suffisante pour que l'on puisse développer $(u+v)^n$ à l'aide du binôme de Newton.

Indication 29.2. **1.** Attention, ici on n'a pas nécessairement $u \circ v = v \circ u$.

2. Il faut trouver une assertion (simple) équivalente à $(u+v)^2 = u^2 + 2u \circ v = v^2$.

3. Il faut s'inspirer de la question précédente.

4. Idem.

. . . .

Exercice 29.3. On dit qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est **nilpotent** si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $u^p = 0$.

1. Si $E \neq \{0\}$, un endomorphisme nilpotent peut-il être bijectif ?

2. Soit u et v deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel E. On suppose que u et v commutent. Montrer que $u+v$ est nilpotent.

Indication 29.3. **1.** Vous pouvez raisonner par l'absurde.

2. La formule du binôme est utile.

. . . .

Exercice 29.4. Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $\alpha \in \mathbf{K}^\star$. Montrer que :

1. $\mathrm{Im}(\alpha u) = \mathrm{Im}(u)$; **2.** $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$; **3.** $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u+v)$.

Proposer des exemples montrant que ces inclusions sont strictes en général.

Indication 29.4. **1.** Vous pouvez raisonner par équivalence et montrer que

$$y \in \mathrm{Im}(u+v) \iff \cdots \iff y \in \mathrm{Im}(u).$$

2. Il faut se donner y dans $\mathrm{Im}(u+v)$ et traduire.

3. Même structure de raisonnement.

. . . .

Exercice 29.5. Soit E, F, G trois $-$espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Démontrer que :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g).$$

Indication 29.5. Rapide, à savoir refaire !!

. . . .

Exercice 29.6. Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

4. En déduire que si E est un espace de dimension finie et $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$, alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Indication 29.6. **1.** Exercice de rédaction ! Il faut se donner $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et montrer que $f^2(x) = 0$. Même stratégie pour la deuxième partie de la question.

2. Il faut raisonner par double implication.

3. Idem.
4. Il faut utiliser les questions précédentes, le théorème du rang.

Exercice 29.7 (*Suites des noyaux et des images itérés*). Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et que plus généralement, pour tout entier naturel p, $\mathrm{Ker}(u^p) \subset \mathrm{Ker}(u^{p+1})$. Que dire des inclusions réciproques ?
2. Trouver de même une relation d'inclusion entre $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(u^2)$ puis plus généralement entre $\mathrm{Im}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^{p+1})$, pour tout entier naturel p.

Indication 29.7.

1. Les inclusions sont assez rapides à obtenir.
   Pour $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array}$, vous pouvez montrer que $\mathrm{Ker}(u^2)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(u)$. Vous pouvez ensuite généraliser.
2. Rien à signaler.

Exercice 29.8. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

Indication 29.8. Il faut procéder par double implication et traduire avec les définitions.

Exercice 29.9. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E.
Montrer que si u et v commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.

Indication 29.9. On rappelle que $\mathrm{Im}(u)$ stable par v signifie que $v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$. Pour montrer cela, on se donnera $y \in \mathrm{Im}(u)$ et on montrera que $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 29.10 (*Lemme de Schur*). Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $h \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $y \in E$, il existe $\lambda_y \in \mathbf{K}$ tel que $h(y) = \lambda_y y$. Le but de l'exercice est de montrer que h est une **homothétie** de E. (c'est-à-dire qu'il existe une constante α tel que pour tout $y \in E$, $u(y) = \alpha y$). Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

1. Soit $y \in \mathrm{Vect}\,(x)$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
2. Soit $y \in E \setminus \mathrm{Vect}\,(x)$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
3. Conclure.

Indication 29.10.

1. Puisque $y \in \mathrm{Vect}\,(x)$, il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que $y = \alpha x$. On peut obtenir $\alpha(\lambda_y - \lambda x)x = 0$ et conclure ensuite (il reste un peu de travail encore !).
2. Il faut utiliser que (x, y) est une famille libre (au fait, pourquoi ?).
3. Rapide avec les questions précédente.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 29.11. Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

1. $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M^{\top} \end{array}$;
2. $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M - \mathrm{tr}(M) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$;
3. $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$;
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y-z, 2x-y, 2x-z) \end{array}$.

Indication 29.11. L'injectivité suffit (pourquoi ?). Elle se montre en calculant le noyau (comme d'habitude ☺).
Pour la question **2.**, vous pouvez commencer par calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \mathrm{tr}(M) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 29.12. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer une base du noyau, de l'image et pour les trois premières questions un système d'équations de l'image. On a noté $E = \left\{ u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \right\}$.
On rappelle que si M est une matrice carrée, on appelle **trace** de M (qu'on note $\mathrm{tr}(M)$) la somme des éléments diagonaux de M.
Vous préciserez si les applications sont injectives, surjectives.

1. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, y-x, 0) \end{array}$;
2. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z + i\overline{z} \end{array}$;
3. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - (X+1)P' \end{array}$;
4. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (a,b) & \longmapsto & (a2^n + b(-3)^n)_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$;
5. $\varphi: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \\ u & \longmapsto & \begin{pmatrix} u_0 & u_2 \\ u_3 & u_1 \end{pmatrix} \end{array}$;
6. $u: \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^1(\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & \left[\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \end{array} \right] \end{array}$;
7. $u: \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a(X^3+X^2-1) + b(X^3+X+2) + c(X^2-X-3) + d(X^3-2) \end{array}$.

Indication 29.12.
1. Rien de particulier, toutes les méthodes sont dans le cours.
2. Rien de particulier, toutes les méthodes sont dans le cours.
3. Rien de particulier, toutes les méthodes sont dans le cours.
4. La linéarité est rapide à obtenir. Pour le noyau, faire certain choix d'entiers aide à montrer qu'il est $\{0\}$. Pour l'image, il est rapide de voir qu'elle incluse dans $\mathrm{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbf{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbf{N}}\right)$: il reste à faire le sens réciproque.
5. Chercher le noyau revient à déterminer à étudier le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$.
   Pour l'image, en calculant u_2 et u_3 pour $u \in E$, vous pouvez montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$.
   Il reste encore à faire la réciproque.
6. La linéarité est rapide. Vous pouvez montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(u) = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}) \,\middle|\, f(0) = 0 \right\}$.
7. Rien de particulier, toutes les méthodes sont dans le cours.

. . . .

Exercice 29.13. Déterminer les dimensions du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, x+2y) \end{array}$;
2. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y+z) \end{array}$;
3. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, y+z, x) \end{array}$;
4. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y+z) \end{array}$;
5. $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_4[X] \\ P & \longmapsto & X(P' - P'(0)) \end{array}$.

Indication 29.13. Il est plus simple pour chaque question de déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$, ce qui donne immédiatement $\dim(\mathrm{Im}(u))$. On obtient ensuite $\dim(\mathrm{Ker}(u))$ rapidement avec un très célèbre théorème. Les dimensions permettent de trouver immédiatement si l'application est injective, surjective.

. . . .

Exercice 29.14. Montrer que $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X^2 + P(1)X \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ et déterminer son noyau. Montrer que son image est $\mathrm{Vect}(X, X^2)$.

Indication 29.14. La linéarité est rapide.
Pour le noyau, vous pouvez montrer que $P \in \mathrm{Ker}(u) \iff P(0) = P(1) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie en terme de divisibilité ?
Pour l'image procéder par double inclusion fonctionne.

. . . .

Exercice 29.15. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' + \cos \times f \end{array}$. Montrer que φ est linéaire, déterminer son noyau et son image. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Indication 29.15. La linéarité est rapide.
Déterminer le noyau revient à résoudre une équation différentielle homogène.
L'application est surjective : il faut bien se rappeler le cours sur les équations différentielles pour le voir !

Exercice 29.16.

1. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbf{K}^2$ tel que $x_0 \neq x_1$. Montrer que
$$\mathcal{B} = ((X - x_0), (X - x_1))$$
est une base de $\mathbf{K}_1[X]$. Soit $P \in \mathbf{K}_1[X]$. Déterminer, en fonction de $P(x_0)$ et $P(x_1)$, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit un triplet $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{K}^3$ de scalaires deux à deux distincts. Montrer que
$$\mathcal{B} = ((X - x_1)(X - x_2), (X - x_0)(X - x_2), (X - x_0)(X - x_1))$$
est une base de $\mathbf{K}_2[X]$. Soit $P \in \mathbf{K}_2[X]$. Déterminer, en fonction de $P(x_0)$, $P(x_1)$ et $P(x_2)$, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $x_0, \cdots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose
$$P_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Vérifier que $P_k \in \mathbf{K}_n[X]$ et calculer $P_k(x_j)$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.
   (b) Montrer que $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
   (c) Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Déterminer, en fonction des nombres $P(x_k)$, les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.
   (d) Montrer que l'application
$$T : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$
   est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Déterminer son application réciproque.

Indication 29.16.

1. Il suffit de montrer que la famille est libre (pourquoi ?). Comme elle n'est pas échelonnée en degré, on ne coupe pas aux calculs !
Une fois que l'on sait que $\mathcal{B}$ est une base, on sait que pour $P \in \mathbf{K}_1[X]$, il existe $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbf{K}^2$ des coordonnées qui vérifient $P = \alpha_0(X - x_0) + \alpha_1(X - x_1)$. On demande d'expliciter α_0 (puis α_1) à l'aide de P. Pour cela vous pouvez calculer pour commencer $\widetilde{P}(x_1)$, ce qui permet d'obtenir α_0.
2. Il faut refaire ce que vous avez fait à la question précédente.
3. (a) Rien à signaler.
   (b) Il faut généraliser ce qui a été fait aux questions **1.** et **2.**.
   (c) Idem.
   (d) Vous pouvez vous contenter de « deviner » l'expression de la réciproque, qu'on note Ψ. Il suffit alors de vérifier que $\Psi \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}_n[X]}$ pour conclure.

Exercice 29.17. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ avec $a^2 + 4b \neq 0$. Soit $E = \left\{ u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
2. Montrer que l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{C}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de E.
4. Déterminer les suites géométriques non nulles qui sont éléments de E.
5. En déduire une base de E. Quel résultat vient-on de retrouver ?

Indication 29.17. **1.** Rien à signaler.

2. Il faut montrer l'injectivité et la surjectivité (en effet, on ne peut pas utiliser de résultats sur la dimension car on ignore celle de E : les plus attentifs auront d'ailleurs remarqué que c'est justement ce que l'on chercher à obtenir à la question suivante).
Pour déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$, vous pouvez choisir $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$.
La surjectivité est évidente (pourquoi ?).

3. Conséquence directe de la question précédente.

4. Il faut introduire u géométrique non nulle de raison q, et traduire par équivalence $u \in E$ jusqu'à obtenir que q est racine d'un certain trinôme.

5. Il faut utiliser la question précédente pour trouver deux suites géométriques qui sont éléments de E : ces suites forment une famille libre, donc...

. . . .

Exercice 29.18. **1.** Donner, si possible, un exemple d'endomorphisme de $E = \mathbf{K}^2$:

(a) dont le noyau est réduit à $\{(0,0)\}$;

(b) dont le noyau et l'image sont non nuls et distincts ;

(c) dont le noyau est égal à l'image ;

(d) dont le noyau est égal à E.

2. Reprendre les mêmes questions dans $E = \mathbf{K}^3$.

Indication 29.18. **1.** **(a)** Que peut-on dire d'une application dont le noyau est nul ?

(b) Une application cherchée peut-elle être injective ? surjective ?

(c) Mêmes questions.

(d) Idem.

2. Vous pouvez chercher à adapter les fonctions introduites avant.

. . . .

Exercice 29.19. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et en déduire que

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

2. On suppose que $v \circ u = 0$ et que $\mathrm{Ker}(u+v) = \{0\}$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$.

Indication 29.19. **1.** L'inclusion se montre avec la méthode habituelle.
Ensuite, l'inclusion se traduit par une inégalité sur les dimensions. Il y a la dimension d'une somme qui apparaît, donc la formule de Grassmann est utile.

2. $u \circ v = 0$ entraîne une inclusion entre $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ (dans quel sens ?). Le théorème du rang aide ensuite à conclure.

. . . .

Exercice 29.20. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f en endomorphisme de E.

1. Montrer que les suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$; **(ii)** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

2. Montrer ensuite que ces deux assertions sont équivalentes à l'assertion **(iii)** : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Indication 29.20. **1.**
- Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Une inclusion entre $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$ est toujours vraie (laquelle ?). On peut ensuite conclure avec un argument de dimension.
- Même idée : une inclusion entre $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ est toujours vraie.

2. Il suffit de prouver que **(i)** est équivalent à **(iii)**.
- Pour le sens direct, on peut montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe (en déterminant $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$) puis conclure avec un argument de dimension.
- Réciproquement, il n'y a qu'à montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ (car l'autre inclusion est toujours vraie, mais ça vous le savez normalement déjà depuis la question **1.** ☺). Si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, vous pouvez en déduire que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ puis conclure que $f(x) = 0$.

. . . .

Exercice 29.21. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

Indication 29.21.
1. Méthode habituelle (on se donne $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ au départ, on traduit ce que cela signifie et on montre que $f^2(y) + f(y) + y = 0$. N'oubliez pas que $f^3(y) = 0$.
2. Vous pouvez montrer que les espaces sont en somme directe puis conclure avec un argument de dimension.

. . . .

Exercice 29.22. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme non bijectif de E tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}(u)$, $u^2(y) = -y$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.
3. Soit $a \in \mathrm{Im}(u)$ tel que $a \neq 0_E$. Montrer que la famille $(a, u(a))$ est libre. Déterminer le rang de u.

Indication 29.22.
1. Il faut commencer par traduire $y \in \mathrm{Im}(u)$ (il existe $x \in E$ tel que...)
2. On montre que la somme est directe et on conclut avec un argument de dimension.
3. Méthode habituelle pour montrer qu'une famille est libre.
   On a une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(u)$, donc que peut-on dire de la dimension de $\mathrm{Im}(u)$? De plus, u est non bijective, donc que peut-on dire de la dimension de $\mathrm{Im}(u)$? Avec ces deux inégalités, vous pouvez conclure.

. . . .

Exercice 29.23. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Démontrer que

$$(\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)) \Longleftrightarrow \left(u^2 = 0 \text{ et } \dim(E) = 2\mathrm{rg}(u)\right).$$

Indication 29.23.
- Sens direct. L'égalité sur les dimensions provient d'un théorème classique. Pour tout $x \in E$, $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, donc aussi à quel autre ensemble ? Il s'ensuit que $u^2(x) = 0$.
- Sens réciproque. On peut montrer une inclusion et conclure avec un argument de dimension.

. . . .

Exercice 29.24. Soit E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On note $v = g|_{\mathrm{Im}(f)}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f))$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(F)$.

Indication 29.24.
1. La première égalité peut être obtenue par équivalences. Pour l'autre, il paraît plus simple de raisonner par double inclusion.
2. Il faut appliquer un célèbre théorème.
3. Idem, en remarquant que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et en utilisant aussi la question précédente.

. . . .

Exercice 29.25 (*Indice maximal de nilpotence*). Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$. Un endomorphisme f de E est dit **nilpotent** s'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0$.
Soit u un endomorphisme nilpotent et soit $p_0 = \min\{p \in \mathbf{N} \mid u^p = 0\}$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p_0-1}(a) \neq 0_E$.
2. Montrer que la famille $(a, u(a), u^2(a), \ldots, u^{p_0-1}(a))$ est libre.
3. En déduire que $p_0 \leqslant n$.

Indication 29.25.
1. Il faut utiliser la définition de p_0 et $E \neq \{0\}$.
2. Vous pouvez faire une récurrence finie.
3. Rapide avec la question précédente.

Exercice 29.26. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous espace vectoriel de E et φ un endomorphisme de E. Montrer que si $F \subset \varphi(F)$ alors $F = \varphi(F)$.

Indication 29.26. Inclusion, égalité de dimensions et le tour est joué !

Projecteurs, symétries

Exercice 29.27. On se place dans $\mathbf{R}^3$. On considère P le plan d'équation $x - y + z = 0$ et la droite $D = \operatorname{Vect}((1,3,1))$.

1. Justifier que P et D sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
2. On note p la projection sur P parallèlement à D et s la symétrie par rapport à P parallèlement à D.
   Pour des réels x, y, z quelconques, donner des expressions de $p(x,y,z)$ et $s(x,y,z)$.

Indication 29.27.
1. Par analyse synthèse, c'est bien !
2. Avec la décomposition d'un vecteur sur $P \oplus D$ obtenue à la question précédente, la réponse est immédiate.

Exercice 29.28. On considère l'application suivante

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}(P(X) - P(2-X)) \end{array}$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Trouver une base et la dimension du noyau puis de l'image de ψ. Quel est le rang de ψ ?
3. Déterminer ψ^2.
4. Que peut-on dire de l'image et du noyau de ψ ?

Indication 29.28.
1. Rapide.
2. Méthode habituelle.
3. Un peu calculatoire mais pas trop difficile.
4. Vous devez remarquer que ψ est un endomorphisme remarquable du cours et en déduire rapidement que le noyau et l'image sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_3[X]$.

Exercice 29.29. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(x - 2y - 2z \ ,\ -2x + y - 2z \ ,\ -2x - 2y + z) \end{array}$.
L'application f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$. Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Indication 29.29. Toutes les méthodes sont dans le cours.

Exercice 29.30. Montrer que les ensembles $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, x = t = 0 \right\}$ et $G = \operatorname{Vect}((1,-2,1,0),(1,-3,3,1))$ sont supplémentaires. Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G. Donner également l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Indication 29.30. Vous pouvez faire une analyse synthèse pour obtenir la décomposition dans $F \oplus G$. Déterminer projection et symétrie est ensuite immédiat.

Exercice 29.31. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f + f - 6\mathrm{Id} = 0$.

1. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f + 3\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = E$.

Indication 29.31. **1.** Il faut utiliser la caractérisation de la bijectivité à l'aide des composées.

2. Analyse synthèse.

Exercice 29.32. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 = f^2$.

1. Montrer que $f^p = f^2$ pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2.

2. Prouver que si l'application f est bijective, alors $f = \mathrm{Id}$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2) = E$.

Indication 29.32. **1.** Récurrence.

2. Si f est bijective, f^{-1} existe et vous pouvez multiplier par cette fonction dans une égalité ☺

3. Analyse/synthèse.

Exercice 29.33. On introduit

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0)\right) \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 3x + 2y - z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

2. Expliciter la projection p sur G de direction F et la symétrie s par rapport à F de direction G.

Indication 29.33. **1.** Analyse/synthèse.

2. Immédiat avec la décomposition obtenue à la question précédente.

Exercice 29.34. On considère l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z) \end{array}$$

1. Montrer que u est une symétrie de $\mathbf{R}^3$.

2. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminer son application réciproque.

Indication 29.34. **1.** Il faut utiliser la caractérisation des symétries avec u^2.

2. Immédiat avec le calcul de la question précédente.

Exercice 29.35. On considère $\mathbf{C}$ comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et l'application

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z} \end{array}$$

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbf{C}$.

2. Montrer que p est un projecteur. Déterminer $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

Indication 29.35. **1.** Rien à signaler.

2. Il faut utiliser la caractérisation des projecteurs avec p^2. $\mathrm{Ker}(p)$ se détermine de la manière habituelle. Puisque p est une projection, on a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\ldots)$; c'est un peu plus simple sous cette forme de déterminer $\mathrm{Im}(p)$.

Exercice 29.36. Pour chacune des applications φ suivantes, vérifier qu'il s'agit d'un projecteur et déterminer sa direction $\mathrm{Ker}(\varphi)$, ainsi que ses invariants $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(1)X^2 \end{array} \quad \text{puis} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\ f & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (f(1) - f(0))x + f(0) \end{array} \right] \end{array}$$

Indication 29.36. Il faut utiliser la caractérisation des projecteurs avec la composée. Ensuite, les noyaux se calculent de la manière habituelle.

Exercice 29.37. On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp)$.

1. Montrer que pour tout $f \in F$, on a $f'' \in F$.
2. On définit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f''. \end{array}$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de F.
   (b) Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
   (c) Quelle est la nature de φ ? On précisera ses éléments caractéristiques.
   (d) Donner l'expression des deux projections associées à φ.

Indication 29.37. 1. Rapide.
2. (a) Rapide.
   (b) Rapide.
   (c) C'est du cours ! Pour trouver les noyaux, méthode habituelle.
   (d) Vous avez obtenu que φ était une ... par rapport à un espace vectoriel G parallèlement à un espace vectoriel H. On demande ici d'expliciter les projections sur G parallèlement à H et sur H parallèlement à G. Il faut utiliser la relation existant entre symétrie et projecteur du cours.

Exercice 29.38. Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E. Montrer que :

$$p \circ q = p \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$$
$$p \circ q = q \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p).$$

Indication 29.38. Il faut utiliser que $p \circ p = ...$ et $q \circ q = ...$ Les preuve sont font par double inclusion.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 29.39. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $n \in \mathbf{N}^\star$. Justifier que les ensembles suivants sont des hyperplans dont on donnera une équation (dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et de $\mathbf{R}_n[X]$ respectivement).

1. $H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = 0 \right\}$;
2. $H = \left\{ P \in \mathbf{R}_n[X] \,\middle|\, \widetilde{P}(0) = 0 \right\}$.

Indication 29.39. Il faut identifier les formes linéaires dont H est le noyau pour chaque question. La méthode pour déterminer une équation est dans le cours.

Exercice 29.40. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on appelle **trace** de M (qu'on note $\mathrm{tr}(M)$) la somme des éléments diagonaux de M. Montrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}\,(I_n)\,.$$

Indication 29.40. En repérant un hyperplan on a immédiatement la réponse avec le cours.

Équations linéaires

Exercice 29.41. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{array}$ est un endomorphisme.

Déterminer les ensembles

$$E = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 4 \right\}, \qquad F = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 12(-1)^n \right\}.$$

Indication 29.41. Il faut interpréter le problème comme la résolution d'une équation linéaire. La méthode est ensuite dans le cours : on cherche à résoudre le problème homogène, puis une solution particulier.

. . . .

Exercice 29.42. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{R}_3[X]$ qui vérifient $\widetilde{P}(-1) = \widetilde{P}(1) = 1$.

Indication 29.42. Il faut interpréter le problème comme la résolution d'une équation linéaire. La méthode est ensuite dans le cours : on cherche à résoudre le problème homogène, puis une solution particulière.