TD 28 Dimension d'un espace vectoriel

Familles libres, génératrices, bases

Exercice 28.1. La famille de vecteurs $((1,1,1),(1,0,1),(2,1,1))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^3$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$?

Indication 28.1. Méthode habituelle (il faut résoudre un système) pour montrer que la famille est libre. Ensuite on peut conclure que c'est une base avec un argument de dimension.

Exercice 28.2. La famille de vecteurs $((1,1,1,1),(1,0,1,0),(2,1,1,0))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^4$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbf{R}^4$?

Indication 28.2. La famille ne peut pas être génératrice (pourquoi ?). La liberté s'obtient avec la méthode habituelle.

Exercice 28.3. Démontrer que la famille de polynômes $(X-2, 2X+3)$ est une base de $\mathbf{R}_1[X]$.

Indication 28.3. On peut montrer que la famille est libre puis conclure avec un argument de dimension.

Exercice 28.4. On considère $a=(1,i,-1,-i)$, $b=(0,1+i,2i,i-1)$ et $c=(1,1,1,1)$. Prouver que (a,b,c) est une famille liée dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ et une famille libre dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$.

Indication 28.4. Dans $\mathbf{C}$, on se ramène à un système de quatre équations à trois inconnues dans $\mathbf{C}$.
Dans $\mathbf{R}$, on identifie plutôt les parties réelles et algébriques, ce qui fournit 8 (en fait 7, une équation est $0=0$) équations à trois inconnues.

Exercice 28.5. Introduisons les fonctions f, g et h définies sur $\mathbf{R}$:

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}, \qquad g : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}, \qquad h : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}.$$

Démontrer que la famille (f,g,h) est une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Indication 28.5. Méthode habituelle. Les limites sont utiles pour conclure.

Exercice 28.6. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, dire si les familles suivantes sont libres.

1. $\mathcal{F}_1 = \left(f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+k}\right)_{1 \leqslant k \leqslant 100}$;

2. $\mathcal{F}_2 = \left(g_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}\right)_{1 \leqslant k \leqslant 100}$.

Indication 28.6.

1. Les vecteurs f_1 et f_2 sont colinéaires.
2. La famille est libre. Vous pouvez commencer par une famille de trois vecteurs au lieu de 100 pour comprendre comment justifier que les coefficients de la combinaison linéaires sont tous nuls. Ensuite, il faut généraliser. Pour bien rédiger, faire une récurrence finie (vous pouvez par exemple montrer que pour tout $k \in [\![1,100]\!]$, H_k : « si $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j = 0$, alors pour tout $j \leqslant k$, $\lambda_j = 0$ »).

Exercice 28.7. Soit $m \in \mathbf{N}$. On note, pour tout $i \in [\![0, m]\!]$, $f_i : x \longmapsto \sin(2^i x)$. Pour les familles de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ci-dessous, dites si elles sont libres ou liées.

1. $\mathcal{F}_1 = \big(\cos, \sin, \exp\big)$;

2. $\mathcal{F}_2 = \big(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp\big)$;

3. $\mathcal{F}_3 = \big(\cos, \sin, f : x \longmapsto \cos(x + \pi/4)\big)$;

4. $\mathcal{F}_{4,m} = \big(f_0, f_1, \dots, f_m\big)$.

Indication 28.7.

1. La famille est libre. Vous pouvez évaluer une relation du type $\lambda \cos + \mu \sin + \nu \exp = 0$ en trois réels pour montrer que $\lambda = \mu = \nu = 0$.
2. La famille est liée (un vecteur est assez clairement combinaison linéaire des deux autres).
3. La famille est liée (vous pouvez utiliser une formule de trigonométrie pour le montrer).
4. La famille est libre : vous pouvez le démontrer par une récurrence sur m. Dans l'hérédité, vous pouvez évaluer la relation écrite en $2x$ et utiliser des formules de duplication (c'est plus difficile que les autres questions).

. . . .

Exercice 28.8. Déterminer une famille génératrice, puis une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 3x + y = 0 \text{ et } x + t = 0 \right\}$;

2. $F = \left\{ P \in \mathbf{R}_2[X] \;\middle|\; \widetilde{P}(1) = 0 \right\}$.

Indication 28.8. Il faut écrire les ensembles comme des sous-espaces engendrés, ce qui fournit automatiquement une famille génératrice. Il reste à montrer que les familles obtenues sont libres.

. . . .

Exercice 28.9. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ P \in \mathbf{C}_4[X] \;\middle|\; \widetilde{P}(-1) = \widetilde{P}(1) = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}_4[X]$, en donner une base et sa dimension.

Indication 28.9. Pour trouver une famille génératrice, vous pouvez remarquer que $P \in F$ équivaut à l'existence de $Q \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $P = (X^2 - 1)Q$ (pourquoi ?).

. . . .

Exercice 28.10. Considérons les ensembles

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + y - 4z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0 \right\}.$$

Montrer que E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie et en déterminer une base.

Indication 28.10. Il faut d'abord trouver une famille génératrice puis montrer que celle-ci est libre.

. . . .

Exercice 28.11. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$x = (1, 0, 0, 1), \quad y = (1, -1, 0, 1), \quad z = (1, 0, 1, 1), \quad t = (1, 1, 1, 1).$$

1. Montrer que la famille (x, y, z, t) est une famille liée.
2. La famille (x, y, z) peut-elle être complétée en une base de $\mathbf{R}^4$?
3. Compléter la famille (x, y, z) en une base de $\mathbf{R}^4$.

Indication 28.11.

1. Il faut chercher une combinaison linéaire non triviale entre les vecteurs de tête. Si vous n'en trouvez pas, vous pouvez toujours résoudre un système.
2. Relire le cours.
3. La méthode est dans le cours : il faut essayer d'ajouter des vecteurs de la base canonique et tester si la nouvelle famille est libre.

. . . .

Exercice 28.12.

1. Démontrer que, dans $\mathbf{R}[X]$, la famille de polynômes $(X^3 + 2X - 1, X + 1, X^3 - X^2)$ est une famille libre.

2. Cette famille est-elle une base de $\mathbf{R}_3[X]$?
3. La compléter en une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Indication 28.12. **1.** Méthode habituelle.

2. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}_3[X]$?
3. Méthode habituelle. Bien observer le calcul fait en **1.** peut vous aider à choisir un vecteur adéquat à ajouter.

Exercice 28.13. **1.** Montrer que le triplet $\mathcal{B} = ((0,1,1),(2,0,-1),(2,1,1))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

2. Donner les coordonnées des vecteurs $(4,-1,1)$ et $(1,0,0)$ dans cette base.

Indication 28.13. Vue la question **2.**, autant chercher directement si un vecteur $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ quelconque est engendré par la famille $\mathcal{B}$ (ce qui revient à montrer que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice). La question **2.** sera alors immédiate.

Exercice 28.14. Dans $\mathbf{R}_4[X]$, montrer que la famille $(1,(X-1),(X-1)^2,(X-1)^3,(X-1)^4)$ est une base et déterminer les coordonnées de $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ dans cette base.

Indication 28.14. La famille est clairement libre (pourquoi ?), donc c'est une base (pourquoi ?). Une formule du cours sur les polynômes donne directement les coordonnées de P dans cette base.

Exercice 28.15. On note F l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ vérifiant, pour tout réel x, $f(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{x^2}$.
Montrer que F est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base.

Indication 28.15 . On peut écrire F sous forme d'espace engendré, ce qui fournit automatiquement une famille génératrice. Il ne reste plus qu'à montrer que cette famille est libre.

Exercice 28.16. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $e_k = \sum_{\ell=0}^{k} X^\ell$.

1. Démontrer que $(e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Déterminer les coordonnées du polynôme $P_k = X^k$ dans cette base.

Indication 28.16. **1.** La famille est clairement libre (pourquoi ?) donc c'est une base (pourquoi ?).

2. Essayer de mieux comprendre l'exercice en choisissant d'abord $n = 4$, et essayer d'exprimer X^3 à l'aide de e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 par exemple.

Exercice 28.17. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vérifiant $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. De plus, on note :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad P_i = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (X - x_k).$$

1. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, vérifier que $P_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P_i(x_i) \neq 0$.
2. En déduire que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une famille libre de $\mathbf{R}_n[X]$. Est-elle génératrice ?

Indication 28.17. **1.** Rien de particulier.

2. Soit $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbf{C}$ tels que $\sum_{\ell=0}^{n} \lambda_\ell P_\ell = 0$. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, vous pouvez obtenir $\lambda_i = 0$ en évaluant la relation précédente en un réel bien choisi. Cela permet de montrer la liberté de la famille. Il s'ensuit immédiatement que c'est une base (pourquoi ?).

Sommes, sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 28.18. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$x = (1,2,0,1), \qquad y = (2,1,3,1), \qquad z = (7,8,9,5)$$

$$t = (1,2,1,0), \qquad u = (2,-1,0,1), \qquad v = (-1,1,1,1), \qquad w = (1,1,1,1).$$

Posons

$$A = \operatorname{Vect}(x,y,z) \qquad \text{et} \qquad B = \operatorname{Vect}(t,u,v,w).$$

1. Déterminer la dimension et une base de A et de B.
2. Déterminer la dimension et une base de $A+B$.
3. Déterminer la dimension et une base de $A \cap B$.

Indication 28.18. **1.** Il faut extraire des familles libres maximales des familles génératrices proposées.

2. Le cours donne une famille génératrice de $A+B$: il reste à en extraire une base.
3. Vous pouvez chercher des équations de A et B, puis en déduire une famille génératrice de $A \cap B$ et enfin une base de $A \cap B$.

Exercice 28.19. Montrer que $F = \operatorname{Vect}\big((1,2,1),(0,1,1)\big)$ et $G = \operatorname{Vect}\big((0,1,0)\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Indication 28.19. Il faut utiliser une des caractérisations de la dimension finie.

Exercice 28.20. Dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \;\middle|\; x + iy - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ (a+ib, a-ib, a+b) \;:\; (a,b) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Déterminer une base de F, une base de G, une base de $F+G$ et une base de $F \cap G$.

Indication 28.20. Rien de particulier, toutes les méthodes sont classiques.

Exercice 28.21. Déterminer un supplémentaire dans $\mathbf{R}^4$ de

$$E = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x + y - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0 \right\}.$$

Indication 28.21. La méthode est dans le cours (il faut trouver une base de E, la compléter en une base de $\mathbf{R}^4$ et en déduire un supplémentaire de E).

Exercice 28.22. Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ P \in \mathbf{R}_4[X] \;\middle|\; \widetilde{P}(1) = \widetilde{P'}(1) = \widetilde{P'}(0) = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_4[X]$ et en donner une base, sa dimension et un supplémentaire dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Indication 28.22. Pour trouver une base de F, il faut résoudre un gros système.
Pour compléter cette base en une base de $\mathbf{R}_4[X]$ (et ainsi obtenir un système générateur), vous pouvez chercher une base de F échelonnée en degré (éventuellement en faisant des combinaisons linéaires des vecteurs que vous avez obtenus dans un premier temps).

Exercice 28.23. On pose

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \;:\; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \;:\; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Prouver que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F \oplus G$.

Indication 28.23. Vous pouvez utiliser la caractérisation $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}))$.

Exercice 28.24. Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ P \in \mathbf{R}_3[X] \;\middle|\; \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}'(1) = 0 \right\}$ dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Indication 28.24. Méthode habituelle.

Exercice 28.25. Déterminer un supplémentaire de $F = \{ P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Indication 28.25. Méthode habituelle.

Exercice 28.26. Dans $E = \mathbf{R}^4$, on considère $a = (1,2,0,1)$, $b = (2,1,3,-1)$, $c = (4,5,3,1)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(a,b,c)$.

1. Déterminer la dimension et une base de F. Déterminer un système d'équations de F.
2. Soit $G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x + z - t = 0 \right\}$. Déterminer une base de G et sa dimension.
3. Montrer que $F \oplus G = E$. Donner la décomposition selon F et G du vecteur $s = (6, 10, 8, 2)$.

Indication 28.26.
1. Vous pouvez tout faire en ne résolvant qu'un seul système !
2. Il faut résoudre un certain système.
3. Vous pouvez tout faire en ne résolvant qu'un seul système !

Exercice 28.27. Soit D l'ensemble des matrices diagonales de $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et F le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que D et F sont supplémentaires dans E.

Indication 28.27. Méthode habituelle (il faut trouver une base de D, une base de F, montrer que $F \cap D = \{0\}$ et conclure avec les dimensions).

Exercice 28.28. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbf{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Indication 28.28. Quelle est au moins la dimension de $F \cap G$? (une célèbre formule donne directement la réponse).

Exercice 28.29. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Dans cette question $n = 3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
   (b) Montrer que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.
2. On revient au cas général.
   (a) Donner sans justification une base et la dimensions de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.
   (b) Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Indication 28.29.
1. (a) Vous pouvez introduire $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ et traduire $M \in \mathcal{S}_3$ pour trouver une famille génératrice de $\mathcal{S}_3$ et en déduire une base. Idem pour $\mathcal{A}_3$.
   (b) Vous pouvez utiliser une caractérisation de la dimension finie.
2. Il faut s'inspirer de la question **1.**

Exercice 28.30. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 3$.
Soit H et H' deux hyperplans de E c'est-à-dire des sous-espace vectoriels de E de dimension $n-1$.

1. Montrer que $\dim(H + H') = n - 1$ si, et seulement si, $H = H'$
   On suppose désormais que $H \neq H'$.
2. Montrer que $H + H' = E$.
3. Montrer que $\dim(H \cap H') = n - 2$.
4. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel D qui soit un supplémentaire dans E à H et à H'.

Indication 28.30.

1. Un sens de l'équivalence est évident. Pour l'autre, vous pouvez commencer par utiliser la formule de Grassmann pour obtenir une égalité de dimension puis montrer l'égalité d'ensemble à l'aide d'une inclusion.
2. Pourquoi $\dim(H + H') \geqslant n - 1$? Pourquoi $\dim(H + H') \neq n - 1$?
3. Rapide avec la bonne formule...
4. Considérer $v_1 \in H \backslash H'$, $v_2 \in H' \backslash H$ et $v = v_1 + v_2$. Vous pouvez alors montrer que $D = \operatorname{Vect}(v)$ répond la question.

Rang d'une famille de vecteurs

. . . .

Exercice 28.31. Notons $u_1 = (2, -1, -3)$, $u_2 = (-4, 1, 3)$, $u_3 = (-6, 3, 9)$ et $u_4 = (7, 2, 1)$. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?

Indication 28.31. Il faut extraire une famille libre de la famille proposée.