

TD 27

ESPACES VECTORIELS

Sous-espaces vectoriels

Exercice 27.1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel dans lequel ils sont inclus ?

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid x = y\}$;
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq y\}$;
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid |x| = |y|\}$;
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 0\}$;
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 2y \text{ et } x = 3z\}$;
6. $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid xyz = 0\}$;
7. $F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 3x + 1\}$;
8. $F_8 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \sin(x)\}$;
9. $F_9 = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(1) = 0\}$;
10. $F_{10} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(3) \leq 0\}$;
11. $F_{11} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(3) = 2f(2)\}$;
12. $F_{12} = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) \leq 5\}$;
13. $F_{13} = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(1) = 0\}$;
14. $F_{14} = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid X\tilde{P}(1) + (X^2 - 4)\tilde{P}(0) = 0\}$;
15. $F_{15} = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) = 5\}$;
16. $F_{16} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(1) = 0\}$;
17. $F_{17} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(0) = 1\}$;
18. $F_{18} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f'(0) = f'(1)\}$;
19. $F_{19} = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R}) \mid \int_0^1 f(t) \sin(t) dt = 0\right\}$;
20. $F_{20} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f \text{ est croissante}\}$;
21. $F_{21} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f \text{ est paire}\}$;
22. $F_{22} = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ converge}\}$;
23. $F_{23} = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ est bornée}\}$;
24. $F_{24} = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\right\}$;
25. $F_{25} = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\right\}$;
26. $F_{26} = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$;
27. $F_{27} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^{\top} + 2M = I_n\}$;
28. $F_{28} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^{\top} + M = 0\}$;
29. $F_{29} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid M^2 = M\}$;
30. $F_{30} = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

Indication 27.1. Rien de particulier, il faut appliquer la définition (parfois on peut écrire l'ensemble comme un sous-espace engendré ce qui va un peu plus vite) ou trouver un contre-exemple. Pour les premières questions, vous pouvez faire des dessins !

Exercice 27.2. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Est-il vrai que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Est-il vrai que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ?
3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Indication 27.2. 1. C'est dans le cours (essayez de le montrer à nouveau tout de même ☺).

2. Idem.

3. Le sens « $F = G$ implique $F \cup G$ » est immédiat. Pour la réciproque, vous pouvez raisonner par l'absurde. Si $x + y \in F$ et $x \in F$, que peut-on dire de $(x + y) - x$?

Sous-espaces engendrés

- Exercice 27.3.**
1. Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(7, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 4)$ et $(-1, 2)$?
 2. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$?
 3. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(0, -2, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 2, 3)$ et $(3, -1, 2)$?
 4. Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{3}, 1)$?
 5. Dans $\mathbf{R}[X]$, le polynôme $P = 16X^3 - 7X^2 - 4 + 21X$ est-il combinaison linéaire des polynômes

$$A = 8X^3 - 5X^2 + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 + 7X - 2 ?$$

6. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'application $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications $\sin$ et $\cos$?
7. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'application $x \mapsto \cos(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications $\sin^2$ et $\cos^2$?
8. Dans l'espace vectoriel des suites réelles, la suite $(1)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle combinaison linéaire des suites

$$(n^2)_{n \in \mathbf{N}}, \quad (2^n)_{n \in \mathbf{N}}, \quad (2n - 1)_{n \in \mathbf{N}} ?$$

Indication 27.3. Les cinq premières questions peuvent se ramener à l'existence de solutions de systèmes linéaires. Pour la question 6., vous pouvez supposer qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(2x) = a \sin(x) + b \cos(x)$ et obtenir une contradiction en choisissant des valeurs particulières de x . Pour la question 7., une formule de trigonométrie donne directement la réponse. Pour la question 8., vous pouvez raisonner par l'absurde pour montrer que 1 n'est pas combinaison linéaire des suites proposées, et supposer qu'il existe $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = an^2 + b2^n + c(2n - 1)$. À l'aide d'équivalents, vous pouvez montrer que $a = b = c = 0$.

- Exercice 27.4.**
1. Démontrer que les ensembles

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, 2x, -3x) : x \in \mathbf{R}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

2. Déterminer deux vecteurs u et v de $\mathbf{R}^3$ tels que $E = \text{Vect}(u, v)$.
3. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'ensemble F , c'est-à-dire déterminer à quelles conditions sur les réels a, b et c le vecteur (a, b, c) est un élément de F .
4. Justifier que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et démontrer que $E \cap F = \{0\}$.
5. L'ensemble $E \cup F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?

- Indication 27.4.**
1. Le plus simple est d'écrire les ensembles comme des sous-espaces engendrés.
 2. Il faut écrire l'ensemble des solutions de l'équation $3x + y - z = 0$ sous forme de $\text{Vect}(\dots)$.
 3. Il faut chercher les conditions de compatibilité d'un certain système.
 4. C'est dans le cours. Pour déterminer que $E \cap F = \{0\}$, il faut résoudre un certain système linéaire (les questions précédentes sont utiles).
 5. Il faut chercher un contre-exemple.

- Exercice 27.5.** Soit $F = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 \mid \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \\ x + y - u = 0 \\ z + t - u = 0 \end{cases} \right\}$. Déterminer des vecteurs a et b de $\mathbf{R}^5$ de sorte que $F = \text{Vect}(a, b)$.

Indication 27.5. La méthode est dans le cours.

- Exercice 27.6.** Considérons

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x - 2y - t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Déterminer les vecteurs f_1, f_2, g_1, g_2, e de $\mathbf{R}^4$ tels que $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$, $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$ et $F \cap G = \text{Vect}(e)$.

Indication 27.6. La méthode est dans le cours (il faut résoudre des systèmes...).

Exercice 27.7. Soit $e = (1, -1, 2, -2)$, $f = (4, 3, 2, 1)$ et $F = \text{Vect}(e, f)$. Déterminer à quelles conditions sur les réels a, b, c, d le vecteur (a, b, c, d) appartient à F (les conditions trouvées forment un système d'équations cartésiennes de F).

Indication 27.7. La méthode est dans le cours (il faut chercher les conditions de compatibilité d'un certain système...).

Exercice 27.8. Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(2, 4, 1)$ et $(0, -1, 3)$ (c'est-à-dire l'espace vectoriel $\text{Vect}((2, 4, 1), (0, -1, 3))$).

Indication 27.8. La méthode est dans le cours (il faut chercher les conditions de compatibilité d'un certain système...).

Exercice 27.9. 1. Trouver deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que l'ensemble E des suites réelles vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$$

soit égal à $\text{Vect}((a_n)_{n \in \mathbf{N}}, (b_n)_{n \in \mathbf{N}})$.

2. Écrire $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \mid f'' - f' + f = 0\}$ sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de fonctions.

Indication 27.9. Il faut « résoudre » les problèmes donnés (chercher l'expression des suites récurrentes et des solutions de l'équation différentielle).

Exercice 27.10. Soit $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid X\tilde{P}(1) + (X^2 - 4)\tilde{P}(0) = 0\}$. Écrire F comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$.

Indication 27.10. Vous pouvez commencer par justifier que $P \in F$ si et seulement si P est divisible par $X^2 - X$. Il faut ensuite introduire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$, trouver le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X$ (en posant la division euclidienne); comme ce reste est nul, on obtient des conditions sur a, b, c .

Exercice 27.11. Dans $\mathbf{R}^3$, démontrer que $\text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1)) = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, -1, 1))$.

Indication 27.11. Notons $E = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, -1, 1))$. Pour montrer que $E = F$ on procède par double inclusion.

Pour l'inclusion $E \subset F$, il faut montrer que $(1, 1, 0) \in F$, $(0, 0, 1) \in F$ et on conclut que $E \subset F$ (pourquoi?).

L'inclusion $F \subset E$ est similaire.

Exercice 27.12. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

Montrer que $\text{Vect}(A, B) = \text{Vect}(C, D)$.

Indication 27.12. Si $A \in \text{Vect}(C, D)$ et $B \in \text{Vect}(C, D)$, on peut en déduire que $\text{Vect}(A, B) \subset \text{Vect}(C, D)$ (pourquoi?). L'inclusion réciproque se fait de la même manière.

Exercice 27.13. Soit E un espace vectoriel et X_1, X_2, X_3 trois vecteurs de E . Posons

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = X_1 + X_2, \quad Y_3 = 2X_1 + X_2 - X_3.$$

Montrer que :

$$\text{Vect}(X_1, X_2, X_3) = \text{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3).$$

Indication 27.13. Si $X_1, X_2, X_3 \in \text{Vect}(Y_1, Y_2, Y_2)$, on peut en déduire que $\text{Vect}(X_1, X_2, X_3) \subset \text{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$ (pourquoi?). L'inclusion réciproque se fait de la même manière.

Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 27.14. Soit $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 5))$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 0), (1, 1, 1))$.

1. À quelles conditions le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient-il à F ? à G ?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbf{R}^3$ tel que $F \cap G = \text{Vect}(a)$.
3. Montrer que $F + G = \mathbf{R}^3$. Cette somme est-elle directe?

Indication 27.14. 1. On demande de décrire les ensembles par équations (donc il faut chercher des conditions de compatibilité de système, voir cours).

2. Il faut résoudre un système linéaire (la question précédente est utile!).
3. On sait d'après ce qui précède que la somme n'est pas directe (pourquoi?). Pour montrer que $F + G = \mathbf{R}^3$, on peut résoudre un « gros » système.

Exercice 27.15. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

1. Donner une description de F et G comme sous-espaces vectoriels engendrés.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Montrer qu'il est possible de trouver a de sorte que $(a, -a, 0) \in F$ et $(x - a, y + a, z) \in G$. Que vaut $F + G$ (on pourra remarquer que $u = (a, -a, 0) + (x - a, y + a, z)$).
3. F et G sont-ils en somme directe?

Indication 27.15. 1. Immédiat.

2. Il est rapide de voir que $(a, -a, 0) \in F$. Pour trouver a tel que $(x - a, y + a, z) \in G$, vous pouvez résoudre une équation (et exprimer a en fonction de x, y, z).
3. Vous pouvez utiliser une des caractérisation de la somme directe.

Exercice 27.16. On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, ainsi que

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid AM = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid BM = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

Indication 27.16. Rien à signaler.

Exercice 27.17. Dans chacun des cas suivants, montrer que les espaces vectoriels F et G sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires (respectivement dans $\mathbf{R}^3$ pour (a) et dans $\mathbf{R}^4$ pour (b))?

- (a) $F = \text{Vect}((1, 1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 3), (2, 1, -1))$.
- (b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z = 0 \text{ et } t = 0\}$.

Indication 27.17. Vous pouvez faire des analyses/synthèses (voir cours). L'analyse-synthèse est plus simple si un ensemble est donné sous forme d'équation et l'autre sous forme de Vect. Vous pouvez donc, pour la première question, chercher une équation cartésienne de G (cf. Exercice 27.7). Pour la seconde question, vous pouvez commencer par écrire G sous forme de sous-espace engendré.

Exercice 27.18. Dans $\mathbf{R}^n$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 2, \dots, n)$ et le sous-ensemble $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^n$.

Indication 27.18. 1. Rien à signaler.

2. Vous pouvez faire une analyse/synthèse (voir cours).

.....

Exercice 27.19. Dans $\mathbf{R}[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \mathbf{R}_0[X]$ et $G = \{(X-1)Q(X) \mid Q \in \mathbf{R}[X]\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}[X]$.

Indication 27.19. • *Méthode 1* : vous pouvez remarquer que $G = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$ (pourquoi ?) puis faire une analyse-synthèse.

• *Méthode 2* : vous pouvez faire une division euclidienne pour justifier que $F + G = \mathbf{R}[X]$. Ensuite, il reste à montrer que $F \cap G = \{0\}$.

.....

Exercice 27.20. On appelle I l'ensemble constitué des fonctions impaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et P celui des fonction paires. Montrer que ces sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Indication 27.20. Cet exercice a déjà été fait dans le chapitre sur les fonctions. Il faut faire une analyse/synthèse.

.....

Exercice 27.21. On considère les ensembles

$$F = \left\{ P \in \mathbf{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \}.$$

1. Déterminer des polynômes $P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{R}_2[X]$ tels que $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$ et $G = \text{Vect}(P_3)$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}_2[X]$?

Indication 27.21. 1. Pour F , vous pouvez introduire $P = aX^2 + bX + c$ et traduire $P \in F$ par équivalences. Idem pour G .

2. Méthode habituelle (analyse/synthèse).

.....

Exercice 27.22. Les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(\cos)$ et $G = \text{Vect}(\sin)$ de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont-ils en somme directe ?

Indication 27.22. Il faut utiliser une des caractérisations du cours.

.....

Exercice 27.23. Soit $F = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$, $G = \mathbf{C}_1[X]$ et $H = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{C}[X]$. Montrer que c'est aussi le cas de G et H .

Indication 27.23. Méthode habituelle (analyse/synthèse).

.....

Exercice 27.24. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0 et $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$ supplémentaires.

Indication 27.24. 1. Rien de particulier.

2. Méthode habituelle (analyse/synthèse).