TD 26 — Séries numériques

Calcul de sommes

Exercice 26.1. Justifier que les séries suivantes sont convergentes et donner leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{4}{5^n}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{2n}}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{5^{n-1}}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n+3^n}{7^n}$;
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{3^{n+1}}$;
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{Arctan}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\mathrm{Arctan}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)$;
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{e}^{-2}2^n}{n!}$;
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{3^{2n+1}}$;
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}$;
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n)!}$.

Indication 26.1. Il faut repérer des séries usuelles (on n'en a pas vu beaucoup : soit une géométrique, soit une exponentielle !) et un télescopage. La dernière est plus difficile : vous pouvez calculer la somme de $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}+\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}\right)$ pour commencer.

Exercice 26.2.

1. Déterminer la nature de la série de terme général
$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$
2. En vous aidant d'une décomposition en éléments simples, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

Indication 26.2.

1. Vous pouvez utilisez un équivalent.
2. Une fois la décomposition en éléments simples effectuée, il faut faire des télescopages.

Exercice 26.3.

1. Déterminer la nature de la série de terme général
$$u_n=\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right),$$
2. Calculer sa somme après avoir reconnu une série télescopique.

Indication 26.3.

1. Vous pouvez utiliser le critère de l'équivalent par exemple.
2. Il faut utiliser des opérations avec ln avant de faire plusieurs télescopages !

Exercice 26.4. **1.** Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1-(-1)^N x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Indication 26.4. **1.** Partir du terme de droite. Que reconnaît-on ?

2. Séparer en deux intégrales. L'une est calculable, il faut majorer l'autre.

Nature d'une série

. . . .

Exercice 26.5. Introduisons la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $u_n \leqslant \mathrm{e}^{-n}$. En déduire la nature de la série, puis une majoration de sa somme.

Indication 26.5. L'inégalité est assez rapide à obtenir. Ensuite, on a une inégalité, donc quel critère de converge pourrait-on appliquer ?

. . . .

Exercice 26.6. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série dont le terme général est :

1. $\dfrac{n+2}{n^3+1}$; **2.** $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; **3.** $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$; **4.** $\dfrac{n-1}{3^n}$;

5. $\dfrac{4n^2+5n}{5^n}$; **6.** $\dfrac{1}{\ln(n)}$; **7.** $\dfrac{2^n-n}{3^n}$; **8.** $\mathrm{e}^{-\sqrt{1+n}}$;

9. $\dfrac{1+n}{n^3(n+\ln n)}$; **10.** $\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; **11.** $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$; **12.** $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

13. $\dfrac{n^2}{n!}$; **14.** $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$; **15.** $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; **16.** $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$;

17. $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; **18.** $\dfrac{\cos n}{n^2+3n-2}$; **19.** $\cos\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$; **20.** $\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}-\sqrt{n}$.

Indication 26.6. **1.** Équivalent.

2. Équivalent.

3. Équivalent.

4. Petit o (vous pouvez montrer que $\dfrac{n-1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par exemple).

5. Même idée.

6. Vous pouvez utiliser $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et la contraposée de la règle du petit o.

7. Petit o.

8. Petit o (et éventuellement équivalent).

9. Équivalent.

10. Limite du terme général ?

11. Équivalent.

12. • *Méthode 1.* Vous pouvez montrer qu'à partir d'un certain rang, $0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant q^n$, où $|q| < 1$.

- *Méthode 2.* Vous pouvez remarquer que $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ et en déduire un équivalent (pour cela, chercher la limite de $\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$).

13. Petit o.

14. Équivalent.

15. Quelle est la limite du terme général de la série ?

16. Équivalent.

17. À partir de $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$, vous pouvez chercher un équivalent (en passant par un DL pour éviter de sommer des équivalents).

18. Vous pouvez faire une comparaison, puis montrer que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+3n-2}$ converge avec un équivalent. On en déduit la convergence absolue.

19. Quelle est la limite du terme général de la série ?

20. Équivalent.

Exercice 26.7. Dans chacun des cas suivants, déterminer, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$, la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$; **2.** $\sin\left(\frac{\pi}{n^\alpha}\right)$; **3.** $u_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$.

Indication 26.7. Règle de l'équivalent avec une série de Riemann.

Exercice 26.8. En utilisant une comparaison avec une intégrale, déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$.

Indication 26.8. La fonction $f : \begin{array}{ccc} [2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x\ln(x)} \end{array}$ est continue, positive et décroissance : que dit le théorème de comparaison série/intégrale (ou plutôt son corollaire dans le cours) ? Vous pouvez alors calculer l'intégrale pour en déduire la limite de $\left(\int_2^N f(x)\right)_{N\geqslant 2}$ et conclure.

Lien entre suite et série

Exercice 26.9. Soit $u_0 \in \mathbf{R}_+^\star$. On définit par récurrence la suite (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n}u_n$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante.
   (c) En déduire que u converge et déterminer sa limite.
2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Indication 26.9. 1. (a) Récurrence immédiate.
   (b) Rien de particulier.
   (c) Quel théorème donne l'existence d'une limite pour une suite monotone ? Ensuite pour trouver la limite, méthode habituelle (on passe à la limite dans la relation de récurrence).
2. IL faut composer la relation de récurrence qui définit la suite par une certaine fonction.

3. Voir dans le cours le lien entre suite et série.

Exercice 26.10. Introduisons la suite u de terme général

$$u_n = \frac{n!}{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

1. Montrer que $1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.

2. Montrer que les suites de termes généraux $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $-\frac{1}{12n^2}$ sont des suites équivalentes.

3. En déduire que la suite u converge.

Indication 26.10. **1.** Il faut faire un développement limité (attention aux ordres !).

2. Opérations sur le logarithme népérien puis simplification d'une fraction pour se ramener à l'expression de la question **1.**.

3. Il faut utiliser le lien entre série et suite.

Nouvelles techniques de convergence

Exercice 26.11. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{1+a_n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} {a_n}^2$ sont convergentes.

Indication 26.11. Procéder par comparaison.

Exercice 26.12 (*Séries alternées*). Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers 0.

1. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}.$$

4. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge t-elle absolument ? Converge t-elle « simplement » ?

Indication 26.12. **1.** Il y trois points à vérifier dans la définition de « suites adjacentes ». Attention quand vous simplifier $S_{2(n+1)} - S_{2n}$, deux termes doivent rester (idem quand vous simplifier $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1}$).

2. Deux théorèmes pour conclure : un premier qui assure que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite (lequel ?) et un second pour en déduire que (S_n) converge (lequel ?).

3. Un peu plus difficile. Le théorème de convergence des suites adjacentes donne une inégalité vérifiée par la limite commune ℓ des suites. Vous pouvez par exemple montrer ensuite que

$$\underbrace{S_{2n+1} - S_{2n}}_{(-1)^{2n+1}a_{2n+1}} \leqslant \underbrace{\ell - S_{2n}}_{R_{2n}} \leqslant 0$$

pour en déduire $|R_{2n}| \leqslant a_{2n+1}$. Vous pouvez montrer de même que $|R_{2n+1}| \leqslant a_{2n+2}$.

4. Il faut utiliser la question **2.**.

Exercice 26.13. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement plus grands que -1.

1. Montrer que si u est une suite de réels tous de même signe, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ sont de même nature.

2. Montrer que sans cette hypothèse, ce n'est plus nécessairement le cas. On pourra considérer la suite u de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Indication 26.13. **1.** Il faut distinguer les cas où u converge ou pas vers 0.

2. On a déjà vu dans un autre exercice que $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Il reste à voir que $\sum_{n_geq2} \ln(1+u_n)$ diverge. Pour cela, vous pouvez commencer par montrer que :

$$\ln(1+u_n) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

. . . .

Exercice 26.14. Soit f une fonction non nulle continue et positive sur l'intervalle $[0\,;1]$. On considère la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n \geqslant \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire la nature de la série.

3. Application : déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

Indication 26.14. **1.** Vous pouvez faire le changement de variable $t = u^n$, puis pour l'inégalité commencer par montrer que $0 \leqslant nf(u^n)u^{n-1} \leqslant nf(u^n)$.

2. Utiliser le critère de comparaison des séries à termes positifs.

3. Est-on dans le contexte d'application de la question **2.** ?

. . . .

Exercice 26.15 (*Règle de D'Alembert*). Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq 0$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$.

1. Montrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

2. On suppose que $\ell < 1$. Posons $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$.

  (a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^{n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

  (b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.

3. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^4}{3^n}$ converge.

4. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Indication 26.15. **1.** À partir d'un certain rang N, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$.

2. **(a)** Il faut utiliser la définition de la limite pour obtenir que la suite $\left(\dfrac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante à partir d'un certain rang. Étant aussi positive, elle est bornée.

  (b) La question précédente donne un grand O. Le critère du grand O s'applique alors pour conclure.

3. Il faut utiliser la question **2.**

4. Idem.