TD 25 — Convexité de fonctions

Généralités

Exercice 25.1. Soit I, J deux intervalles non vides, non réduit à un point. Soit $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ tels que $g(I) \subset J$. On suppose que f, g sont des fonctions convexes et que f est croissante. Montrer que $f \circ g$ est convexe.

Indication 25.1. Comme on n'a pas d'hypothèse de dérivabilité, il faut utiliser la définition de convexité. Commencer par traduire g convexe, puis appliquer f à l'inégalité obtenue pour conclure ensuite assez rapidement.

Exercice 25.2. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe strictement croissante. Montrer que f tend vers $+\infty$ et $+\infty$.

Indication 25.2. Vous pouvez utiliser la croissance du taux d'accroissement (en 0 par exemple) puis le théorème de minoration.

Exercice 25.3. Soit I un intervalle ouvert non vide. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

1. Montrer que si f est convexe sur I, alors f est continue sur I.
2. Montrer, à l'aide d'un dessin par exemple, que si I est un intervalle fermé et que f est convexe sur I, alors on n'a pas nécessairement f continue sur I.

Indication 25.3.

1. Vous pouvez étudier continuité à gauche et continuité à droite. Pour la continuité à gauche par exemple, vous pouvez montrer avec le théorème de la limite monotone que, si $a \in I$, $\varphi : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche en a. En remarquant que pour tout $x \in I \backslash \{a\}$, $f(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) + f(a)$ on peut conclure.
2. Vue la question **1.**, le contre-exemple doit être une fonction discontinue au bord.

Étude de fonctions

Exercice 25.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^4 + 4x - 1$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Déterminer une équation de cette tangente.
2. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
3. Déterminer le point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente est horizontale.
4. Déterminer le tableau de variations de f.
5. Étudier la convexité de f.
6. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur $[-2\,;\,1]$.

Indication 25.4.

1. (a) Revoir l'interprétation graphique du nombre dérivé dans le cours.
   (b) La formule est dans le cours.
2. Idem.
3. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0 si et seulement si $f'(x_0) = ...$
4. Rien à signaler. Il faut chercher à factoriser $f'(x)$ pour obtenir plus facilement son signe.

5. Le critère pour les fonctions $\mathscr{C}^2$ est le plus simple (il faut justifier avant que f est de classe $\mathscr{C}^2$, ce qui est immédiat).

6. Bien penser à faire apparaître toutes les informations de l'exercice (tangentes, variations, respecter la convexité).

Exercice 25.5. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et donner sa dérivée. La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
6. Étudier la convexité de f. On précisera les points d'inflexion éventuels de f ainsi qu'une équation des tangentes en ces points.
7. Tracer la courbe représentative de f en tenant compte de toutes les informations obtenues dans l'exercice.

Indication 25.5. **1.** Voir la définition dans le cours.

2. La continuité sur $\mathbf{R}_-^\star$ et $\mathbf{R}_+^\star$ est rapide. Pour la continuité en 0, il faut déterminer des limites.

3. La dérivabilité sur $\mathbf{R}_-^\star$ et $\mathbf{R}_+^\star$ est rapide, la dérivée est assez simple aussi à obtenir (il faut se rappeler que $|x| = -x$ si $x < 0$ et $|x| = x$ si $x > 0$). Pour le caractère $\mathscr{C}^1$, il faut obtenir la continuité de f'.

4. Rien à signaler.

5. Vous pouvez utiliser des développements asymptotiques.

6. L'expression de f'' sur $\mathbf{R}_-^\star$ et sur $\mathbf{R}_+^\star$ suffit pour conclure.

7. Rien à signaler.

Exercice 25.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Étudier la convexité, concavité et points d'inflexion de f.
4. Tracer dans un repère orthonormé de la courbe de f, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

Indication 25.6. Rien de particulier, toute est très classique. N'oubliez pas qu'il y a des asymptotes pour le tracé final.

Inégalités de convexité

Exercice 25.7. Montrer, en utilisant la convexité, que pour tout $x \in [0\,;1]$, $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x(\mathrm{e} - 1)$.

Indication 25.7. Il faut introduire la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$, montrer que cette fonction est convexe et utiliser que le graphe est au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

Exercice 25.8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$$

Indication 25.8. Sous la forme $x^{n+1} \geqslant (n+1)x - n$ il est peut-être plus simple de voir quelle fonction convexe introduire. Une fois la fonction déterminer, il faut montrer qu'elle est convexe et utiliser la propriété avec les tangentes (ici, ça n'est pas la tangente en 0 qu'il faut considérer mais en un autre point simple).

Exercice 25.9. Montrer que $f: \begin{array}{rcl}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln(x)) \end{array}$ est concave. En déduire :

$$\forall x, y \in]1\,;+\infty[, \quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Indication 25.9. f est deux fois dérivable, donc la concavité n'est pas très difficile à obtenir. Ensuite il faut utiliser la définition de la concavité pour en déduire l'inégalité demandée.

. . . .

Exercice 25.10 (*Inégalité de Jensen, inégalité arithmético-géométrique*). Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit f une fonction concave définie sur un intervalle I. Soit $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$
Cette inégalité est appelée **inégalité de Jensen**.
2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer l'**inégalité arithmético-géométrique** :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Indication 25.10.

1. Il faut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, H_n : « $\forall x_1, \ldots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$, si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ » est vraie. Pour l'hérédité, vous pourrez distinguer le cas où $\lambda_{n+1} = 1$ (assez simple) et le cas où $\lambda_{n+1} \neq 1$. Pour ce dernier, il peut être utile d'introduire $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, de sorte que $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$ (on pourra donc appliquer l'hypothèse de récurrence !) et :
$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$
2. Il faut appliquer l'inégalité de Jensen avec $f = \ln$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = \dfrac{1}{n}$.

. . . .

Exercice 25.11 (*Inégalités de Hölder et Minkowski*). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $p \in]1\,;+\infty[$. Pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, on appelle **norme** p de X le réel positif

$$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que pour tous $X \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $\|\lambda X\|_p = |\lambda| \,.\, \|X\|_p$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, $\|X\|_p = 0$ si et seulement si $X = 0_{\mathbf{R}^n}$.
3. Soit $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer que pour tous $x, y > 0$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
   (b) Inégalité de Hölder. Montrer que
   $$\forall X, Y \in \mathbf{R}^n, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \,.\, \|Y\|_q\,.$$
4. Inégalité de Minkowski. Soit $p > 1$. Montrer que
$$\forall X, Y \in \mathbf{R}^n, \quad \|X+Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p\,.$$

Indication 25.11. **1.** Rien de particulier.

2. Vous pouvez expliquer ce résultat avec une phrase.

3. **(a)** Il faut utiliser la concavité de ln.

(b) Vous pouvez commencer par traiter le cas où $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$. Il faut ensuite appliquer l'inégalité de la question précédente pour majorer $|x_k y_k|$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et conclure en sommant ces inégalités.

4. On peut considérer q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (ce qui équivaut à $(p-1)q = p$). En remarquant que, pour $X, Y \in \mathbf{R}^n$,

$$\|X + Y\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$$

utiliser l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\|X + Y\|_p^p \leqslant \|X\|_p \|X + Y\|_p^{\frac{p}{q}} + \|Y\|_p \|X + Y\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

On conclut en divisant, quand on peut, par ce qu'il faut.