

TD 24

PROBLÈMES D'ANALYSE
ASYMPTOTIQUE

Solutions d'équations à paramètres

Exercice 24.1. Pour tout entier n non nul, on définit la fonction polynomiale $p_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, p_n possède un unique zéro réel, que l'on note x_n . Déterminer $\lfloor x_n \rfloor$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$, déterminer le signe de $p_n(x_{n-1})$, et en déduire la monotonie de la suite (x_n) .
3. Justifier que (x_n) converge.
4. On note ℓ la limite de (x_n) . Montrer que $x_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. En réitérant le procédé, montrer qu'on a le développement asymptotique

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Indication 24.1. 1. On peut appliquer soigneusement le théorème de la bijection.

2. Il faut utiliser ce que l'on sait, à savoir $p_{n-1}(x_{n-1}) = 0$ et $x_{n-1} \in]-1; 0[$.
Une fois l'inégalité $p_{n-1}(x_{n-1}) > 0$ obtenue, on pourra remarquer que $p_n(x_n) = 0$ et en déduire $p_{n-1}(x_{n-1}) > p_n(x_n)$. On conclut ensuite avec la stricte monotonie de p_n .
3. Il faut simplement citer les résultats obtenus avant dans le bon ordre.
4. On pourra commencer par montrer que $\ell = 1$ (par l'absurde par exemple). Puis ensuite montrer que $n(x_n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
5. Il faut montrer que $n^2 \left(x_n + 1 - \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -3$. Le résultat de la question précédente peut être utile.

Exercice 24.2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \left] n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $\tan(x_n) = x_n$.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$. En donner un équivalent simple.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.
 - (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y_n = \operatorname{Arctan}(x_n)$.
 - (b) Quelle est la limite de (y_n) ?
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$.
 - (a) Soit $x > 0$. Rappeler la valeur de $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - (b) Donner un équivalent simple de (z_n) .
 - (c) Quel développement asymptotique vient-on d'obtenir?

Indication 24.2. 1. Théorème de la bijection à une fonction bien trouvée.

2. $x_n \in I_n$ fournit une minoration utile. Pour un équivalent, il faut utiliser un encadrement bien utile pour déterminer la limite de $\frac{x_n}{n\pi}$ (vous noterez que l'équivalent demandé est « donné » dans la suite de l'énoncé!).
3. (a) L'égalité demandée équivaut à $y_n \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $\tan(y_n) = x_n$.
(b) Immédiat avec les questions précédentes.

4. (a) Voir le cours/TD sur les fonctions trigonométriques réciproques.
 (b) On peut utiliser la question précédente pour transformer $z_n = \operatorname{Arctan}(x_n) \frac{\pi}{2} = \dots$, puis utiliser un équivalent de Arctan pour conclure.
 (c) Il n'y a pas de calculs, il faut relire et essayer de comprendre ce que vous venez de faire!

Suites récurrentes

Exercice 24.3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0. Indication : vous pouvez montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{n}$.
- Montrer que $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$ puis en déduire un équivalent de (u_n) .
- Montrer que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 24.4. On note $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = \ln(n + u_n).$$

- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.
- (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq \ln(2n)$.
 (b) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- Montrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

- Indication 24.3.** 1. Vous pouvez commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > 0$ puis en déduire en minoration de u_{n+1} par une suite qui diverge vers $+\infty$.
2. (a) Récurrence et inégalité classique sur le logarithme népérien.
 (b) Vous pouvez minorer u_n par $\ln(n-1)$ pour commencer, puis encadrer $\frac{u_n}{\ln(n)}$ pour tout $n \geq 2$.
3. Méthode habituelle : on remplace u_n par $\ln(n) + o(\ln(n))$ dans la relation de récurrence.

Suites d'intégrales

Exercice 24.5. On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t}} e^t dt.$$

- Déterminer la limite de (u_n) .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{e}{\sqrt{2}} - (n+1)u_n + \int_0^1 \frac{e^t t^{n+1} dt}{2(1+t)^{3/2}}.$$

- En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{\sqrt{2n}}$.

Indication 24.4. 1. Il faut encadrer l'intégrale d'abord (on rappelle qu'on commence par encadrer l'intégrande).

2. IPP (comme souvent quand on veut établir une relation de récurrence avec une suite définie par une intégrale).
3. Il faut utiliser la question précédente (pour déterminer la limite de la suite définie par $\int_0^1 \frac{e^t t^{n+1} dt}{2(1+t)^{3/2}}$ vous pouvez encadrer comme dans la question 1.).

Bijection réciproque

.....

Exercice 24.6. On note $f : x \mapsto x \exp(x^2)$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et donner ce développement limité.

Indication 24.5. 1. Rien à signaler.

2. Méthode habituelle.
-

Exercice 24.7. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on explicitera.
2. Justifier que f^{-1} admet un $\text{DL}_3(0)$, puis déterminer celui-ci.
3. Déterminer développement limité de f^{-1} au voisinage de $+\infty$ et en déduire une équation de l'asymptote à la courbe représentative de f^{-1} au voisinage de $+\infty$.

Indication 24.6. 1. Rien à signaler.

2. Le cours donne un critère simple pour justifier que f est de classe $\mathcal{C}^3$, la formule de Taylor-Young permet alors de conclure quant à l'existence d'un $\text{DL}_3(0)$. Pour déterminer ce $\text{DL}_3(0)$, on applique la méthode habituelle.
3. Vous pouvez utiliser que $y = f^{-1}(y) + \ln(f^{-1}(y))$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y)$ pour en déduire un équivalent de $f^{-1}(y)$.