TD 23 — Étude de suites récurrentes

Exercice 23.1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$?
2. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Indication 23.1. **1.** Vous pouvez déterminer le signe de $x :\longmapsto f(x) - x$, où $f : x \longmapsto x^2 + 1$.

2. La fonction f admet-elle un point fixe ? Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 23.2 (*Suite de Héron*). On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

Étudier la nature de cette suite et préciser sa limite éventuelle.

Indication 23.2. Vous pouvez introduire $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ puis procéder comme suit :

- établir le tableau de signes de $x \longmapsto f(x) - x$;
- montrer que $\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$ est stable par f ;
- montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$;
- en vous aidant du premier point, montrer que u est décroissante ; vous pouvez en déduire qu'elle converge et trouver ensuite sa limite.

Exercice 23.3. Introduisons $f : x \longmapsto x - \ln x$ définie sur $\mathbf{R}_+^\star$.

1. (a) Étudier la fonction f et tracer sa courbe, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
   (b) Montrer que $f(\mathbf{R}_+^\star) \subset [1\,;\,+\infty[$ (cela revient à montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 1$).
2. Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star$. Soit u la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$.
   (a) À l'aide des graphes précédemment tracés, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite u dans le cas $a = 2$. Émettre une conjecture sur le comportement de u dans les cas $a < 1$ et $a \geqslant 1$.
   (b) Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante ?
   (c) Dans cette question, on suppose $a > 1$.
      i. Montrer que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1.
      ii. Montrer que la suite u est monotone.
      iii. En déduire sa nature, et la valeur de sa limite.
   (d) On suppose à présent que $a < 1$. Quelle est la nature de la suite ?

Indication 23.3. **1.** Rien à signaler pour l'étude de fonction. On rappelle qu'établir $f(\mathbf{R}_+^\star) \subset [1\,;\,+\infty[$ revient à démontrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 1$. Vous pouvez utiliser le tableau de variations de f pour obtenir cette dernière inégalité !

2. (a) Rien à signaler.
   (b) Aidez-vous du graphe !

(c) **i.** On doit démontrer une propriété « pour tout $n \in \mathbf{N}$ » et la suite u est définie par récurrence : on peut donc penser à un raisonnement par... ?

ii. Vous pouvez directement obtenir le signe de $u_{n+1} - u_n$ (la question précédente est alors utile !).

iii. Déterminer la nature d'une suite revient à déterminer si la suite converge ou non. Il faut utiliser les deux questions précédentes pour conclure ici, avec le théorème de la limite monotone.

(d) D'après la question **1.**, à quel intervalle appartient u_1 ? Ensuite, vous pourrez conclure en utilisant les questions précédentes, sans calcul supplémentaire.

. . . .

Exercice 23.4. On cherche à résoudre de manière approchée l'équation :

$$x = 1 + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{E}$$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1 + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution, que nous notons a, et déterminer la partie entière de a.
3. Prouver que si u est une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|.$$

   En déduire qu'une telle suite converge vers a.
4. En considérant une telle suite pour une valeur appropriée de u_0, déterminer un entier n pour lequel u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Indication 23.4. **1.** Vous pouvez majorer $|f'|$.

2. Vous pouvez montrer que $g : x \longmapsto f(x) - x$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans un intervalle à déterminer. Ensuite, quel est le signe de $g(1)$? $g(2)$?
3. Méthode habituelle.
4. On a $|u_0 - a| < 1$ (pourquoi ?), donc si on trouve $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < 10^{-3}$ c'est gagné !

. . . .

Exercice 23.5. **1.** Montrer que $f : x \longmapsto \frac{\cos(x)}{2}$ admet un unique point fixe ℓ dans $\mathbf{R}$.

2. Donner la nature de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n)$.

Indication 23.5. **1.** Vous pouvez montrer que $g : x \longmapsto f(x) - x$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans un ensemble à déterminer.

2. Vous pouvez montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne et appliquer la méthode usuelle pour les suites définies à l'aide d'une fonction contractante.

. . . .

Exercice 23.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que $\mathrm{e}^{-5/4} < \frac{5}{14}$, puis que $3\mathrm{e}^{-1} \leqslant \frac{5}{4}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions de signes contraires dans $\mathbf{R}$. On note a la solution positive. Montrer que a appartient à l'intervalle $I = \left[1\,;\,\frac{5}{4}\right]$.

   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

3. Montrer que I est un intervalle stable par f. Vous pourrez admettre que $\mathrm{e}^{-5/4} \geqslant \frac{2}{7}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Donner une valeur de $n \in \mathbf{N}$ pour laquelle u_n est une valeur approchée de a à 10^{-4} près.

Indication 23.6. **1.** On rappelle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$. En particulier, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{1}{x+1}$.

2. Pour étudier les variations de $g : x \longmapsto f(x) - x$, il faut dériver deux fois.

3. Vous pouvez utiliser la question précédente.

4. Vous pouvez montrer que f est contractante et ensuite appliquer la méthode habituelle pour étudier u.

. . . .

Exercice 23.7. Étudier la convergence de la suite définie par

$$u_0 = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

On pourra admettre que $x \longmapsto \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$ possède un unique point fixe (vous pouvez essayer de le démontrer, mais la calculatrice sera utile !).

Indication 23.7. Si on note $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$, on a f décroissante. Le cours assure qu'il faut alors s'intéresser à (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont deux suites monotones (il faut le redémontrer). On rappelle que si ces suites ont la même limite, u converge vers cette limite commune. Si ces suites n'ont pas la même limite, alors u n'a pas de limite.

. . . .

Exercice 23.8. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur le segment $[0\,;\,1]$, à valeurs dans $[0\,;\,1]$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Le but de l'exercice est de démontrer que les graphes de f et g ont un point commun.
Pour cela, on suppose qu'il n'existe pas de nombre réel α appartenant à $[0\,;\,1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

1. Démontrer que f admet au moins un point fixe sur $[0\,;\,1]$. Par suite, a désigne un point fixe de f.

2. Montrer que la fonction $f - g$ est de signe constant.

3. On introduit la suite u définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$.

- **(a)** Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n est un point fixe de f.
- **(b)** En déduire que la suite u est monotone.
- **(c)** Montrer que la suite u converge, vers un nombre réel de $[0\,;\,1]$ que nous noterons ℓ.
- **(d)** Démontrer que ℓ est à la fois un point fixe de f et de g.

4. Conclure.

Indication 23.8. **1.** Théorème du point fixe le plus classique, déjà démontré avant.

2. Vous pouvez raisonner par l'absurde.

3. **(a)** On demande une démonstration pour tout $n \in \mathbf{N}$ et on dispose d'une relation de récurrence, un type de raisonnement semble adapté !

- **(b)** Quelle différence calculer pour montrer qu'une suite est monotone ?
- **(c)** La suite est monotone, que manque-t-il pour en déduire la convergence ?
- **(d)** On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_{n+1}) = g(u_n)$.

4. Quel type de raisonnement a-t-on mené dans cet exercice ?