TD 22 Développements limités

Calcul de développements limités

Exercice 22.1. Déterminer, s'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de 0 par les expressions suivantes :

1. $\cos(2x)$ (ordre 3) ;

2. $\sin(x) - x + x^7$ (ordre 3) ;

3. $x - \ln(1+x)$ (ordre 3) ;

4. $(\mathrm{e}^x)^2$ (ordre 4) ;

5. $\sin(x+x^2)$ (ordre 3) ;

6. $\sqrt{1+x+x^2}$ (ordre 3) ;

7. $\sin^2(x)$ (ordre 5) ;

8. $\mathrm{e}^x(1+x+x^2)$ (ordre 2) ;

9. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (ordre 3) ;

10. $\ln(\cos x + \sin x)$ (ordre 3) ;

11. $\exp(1+2x)$ (ordre 4) ;

12. $\dfrac{\cos x}{1+x}$ (ordre 4) ;

13. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-2x}$ (ordre 3) ;

14. $\dfrac{\sin(2x)}{x+x^2}$ (ordre 3) ;

15. $\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^x$ (ordre 2) ;

16. $\exp(\dfrac{\sin x}{x})$ (ordre 4) ;

17. $\tan(x)$ (ordre 6) ;

18. $\tan(\dfrac{x}{1-x^2})$ (ordre 4) ;

19. $\dfrac{1}{1+\cos(x)}$ (ordre 2) ;

20. $\sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}}$ (ordre 2) ;

21. $\mathrm{Arctan}(x)$ (ordre 4) ;

22. $\mathrm{Arcsin}(x)$ (ordre 4) ;

23. $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ (ordre 3) ;

24. $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ (ordre 4) ;

25. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ (ordre 5) ;

26. $\displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (ordre 4).

Indication 22.1.

1. Il faut faire un changement de variable.
2. Différence de DL.
3. Différence de DL.
4. Produit de DL.
5. Composée.
6. Composée.
7. Produit ou formule trigonométrique avant.
8. Produit.
9. Produit.
10. Composée.
11. Formule sur exponentielle puis DL.
12. Produit de DL.
13. Produit de DL (avec une petite composée au passage).
14. Vous pouvez calculer le DL de $x \longmapsto \sin(2x) \times \dfrac{1}{1+x}$ (à quel ordre ?) puis diviser par x.

15. Produit de DL (avec une petite composée au passage).

16. DL de sinus, puis DL de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ puis composée (attention à bien se ramener à un DL en 0 avant).

17. Deux méthodes possibles : utiliser $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ et faire un quotient de DL. Sinon, vous pouvez introduire $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$ (pourquoi n'y a-t-il pas de termes pairs ?) puis utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$.

18. D'abord un DL de $x \times \dfrac{1}{1-x^2}$ puis composée par tangente.

19. Quotient

20. On a $\sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}} = 2\sqrt{1 + \dfrac{-3x}{4(x-1)}}$ puis DL.

21. Arctan est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

22. Même méthode qu'avant.

23. Quotient de DL.

24. Quotient de DL.

25. On peut primitiver des DL.

26. Même méthode. Vous pouvez introduire G une primitive de $g : t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$, exprimer $\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ avec G puis chercher des DL de $G(x)$, $G(x^2)$.

....

Exercice 22.2. Déterminer le développement limité au point a l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de a par les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$ (ordre 5) ;

2. $(\ln x)^2$ en $a = 3$ (ordre 2) ;

3. $\sqrt{3x} - \sqrt{3+x}$ en $a = 1$ (ordre 2) ;

4. $\exp(x^2)$ en $a = 2$ (ordre 3).

Indication 22.2. Pour chercher le $\mathrm{DL}_n(a)$ d'une fonction f, vous pouvez plutôt chercher le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto f(x-a)$. Pour simplifier $f(x-a)$, pensez aux formules de trigonométrie, aux formules sur ln, aux formules sur exp et aux formules de factorisation dans une racine carrée.

....

Exercice 22.3. Écrire les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions sin, Arcsin, sh, tan, Arctan. En déduire qu'au voisinage de 0, à droite de 0, on a :

$$\operatorname{Arctan}(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \operatorname{sh}(x) \leqslant \operatorname{Arcsin}(x) \leqslant \tan(x).$$

Indication 22.3 . Les DL ont déjà été calculés avant ou la méthode est connu. Pour les inégalités, vous pouvez déterminer des différences de DL.

....

Exercice 22.4. **1.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}\right)$.

Indication 22.4. **1.** Vous pouvez calculer la somme puis avec des opérations sur ln vous ramener à une différence de ln.

2. Quel est le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} - \mathrm{e}^x$? Vous pouvez ensuite chercher à faire apparaître ce terme dans l'expression demandée.

....

Exercice 22.5. Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Montrer que si f est une fonction paire (resp. impaire), son développement limite ne contient que des termes de degré pair (resp. impair).

Indication 22.5. Il faut introduire un DL de f avec des coefficients quelconques puis calculer un DL de $x \longmapsto f(-x)$ et enfin, identifier les coefficients (on rappelle qu'un DL a une écriture unique).

Applications des développements limités

Exercice 22.6.

1. Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto \sin(x) + \tan(x)$ en 0.
2. Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto x^3 + \mathrm{e}^x - 1$ en 0.
3. Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \cos(x) - 1$ en 0.
4. Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{x^3}}$ en $+\infty$.

Indication 22.6. Il faut faire des DL. La difficulté est la gestion des ordres.

Exercice 22.7. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - 4\sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$;
5. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{6}\\ x<\frac{\pi}{6}}} (1 - 2\sin(x))\tan(3x)$;
6. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\ln(\sin(x))}\right)$.

Indication 22.7. Il faut faire des DL. La difficulté est la gestion des ordres.

Exercice 22.8. Montrer que les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité en 0, et étudier la dérivabilité en 0 des fonctions ainsi définies.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x)$;
3. $x \longmapsto \dfrac{\cos(2x^2) - 1}{x^2}$;
4. $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-\cos(3x)}{x^2}\right)$;
5. $x \longmapsto \exp\left(\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x}\right)$;
6. $x \longmapsto (1+2x)^{\frac{1}{2}}$.

Indication 22.8. Il faut obtenir des $\mathrm{DL}_1(0)$ des fonctions proposées et utiliser le cours ☺.

Exercice 22.9. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'équation de la tangente au point d'abscisse a indiqué, et trouver la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage du point a.

1. $f : x \longmapsto \sin^2(x) - \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $a = 0$.
2. $f : x \longmapsto \sin(x) + \operatorname{Arcsin}(x)$, $a = 0$.
3. $f : x \longmapsto \sqrt{3x} - \sqrt{3+x}$, $a = 1$.

Indication 22.9. Il faut obtenir des $\mathrm{DL}_1(0)$ des fonctions proposées et utiliser le cours ☺.

Exercice 22.10. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'asymptote et trouver la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote, au voisinage de $+\infty$.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$;
2. $f : x \longmapsto (2x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$;
3. $f : x \longmapsto (x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}}$;
4. $f : x \longmapsto x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{3x^2}{1+3x^2}\right)$.

Indication 22.10. On veut des développements (pas limités, mais asymptotique) au voisinage de $+\infty$, donc il faut faire apparaître des $\dfrac{1}{x}$ (qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$).

. . . .

Exercice 22.11. Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \qquad u_n = a\ln(n) + b\ln(1+n) + c\ln(1+n^2).$$

Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquelles $u_n \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Indication 22.11. Vous devez d'abord montrer, avec un changement de variable, que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} (a+b+2c)\ln(x) + b\frac{1}{x} + \frac{2c-b}{2}\frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Que se passe-t-il si $a+b+2c \neq 0$? Si $a+b+2c = 0$ et $b \neq 0$?