TD 21 Comparaison locale des fonctions

Petits o, grands O

Exercice 21.1. **1.** On considère les fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto x^2 \qquad f_2 : x \longmapsto 4x^2\ln(x) \qquad f_3 : x \longmapsto 2x^3 \qquad f_4 : x \longmapsto 7\sqrt{x} \qquad f_5 : x \longmapsto -3\cos(x)x^2$$

ainsi que la fonction $g : x \longmapsto x^2 + 4x^2\ln(x) + 2x^3 + 7\sqrt{x} - 3\cos(x)x^2$.

(a) Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(f_j(x))$.

(b) Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(f_j(x))$.

(c) Déterminer l'exposant $\alpha \in \{3; 2; 1/2\}$ tel qu'on puisse écrire

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^\alpha)\,.$$

(d) Déterminer un équivalent de g en 0.

(e) Mêmes questions au voisinage de $+\infty$ pour les mêmes fonctions.

2. On considère les fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x^2} \quad f_2 : x \longmapsto \frac{13}{x^3} \quad f_3 : x \longmapsto \frac{1}{(\ln(x))^2} \quad f_4 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$$

ainsi que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{13}{x^3} + \dfrac{1}{(\ln(x))^2} + \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x\to +\infty}{=} \mathrm{o}(f_j(x))$.

(b) Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Indication 21.1. **1.** **(a)** Vous pouvez étudier la limite de $\dfrac{f_i}{f_j}$ en 0 pour conclure, pour tout $(i, j) \in [\![1, 5]\!]^2$.

(b) Idem.

(c) Vous pouvez commencer par simplifier $\dfrac{g(x)}{x^\alpha}$ avant d'étudier la limite.

(d) Aidez-vous de la question précédente.

(e) Mêmes méthodes en $+\infty$.

2. Idem.

Équivalents

Exercice 21.2. **1.** Déterminer un équivalent simple au voisinage du point indiqué des fonctions suivantes

(a) $x \longmapsto \cos(\sin(x))$ en 0 ; **(b)** $x \longmapsto \tan(\sin(x))$ en 0 ; **(c)** $x \longmapsto \ln(\cos(x))$ en 0 ;
(d) $x \longmapsto \exp(\cos(x)) - 1$ en $\pi/2$; **(e)** $x \longmapsto \ln(\sin(x))$ en 0.

2. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point indiqué.

(a) $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ en 0 ; **(b)** $x \longmapsto \mathrm{Arccos}(x) - \pi/2$ en 0 ;
(c) $x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$ en 0 ; **(d)** $x \longmapsto \tan(x) - \sqrt{3}$ en $\pi/3$.

3. Déterminer un équivalent simple de la fonction tangente au voisinage de π.
En déduire un équivalent simple de $x \longmapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)$ au voisinage de 0.

Indication 21.2. **1.** **(a)** Changement de variable.

(b) Changement de variable.

(c) Changement de variable.

(d) Changement de variable, puis formule $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$ (pour f dérivable en a, of course !).

(e) Méthode dans le cours.

2. Formule $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$ pour toutes les questions.

3. Même formule, puis équivalents usuels.

. . . .

Exercice 21.3. Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes, au point indiqué :

1. $x \longmapsto \dfrac{x^3+3x^2-2}{3x^2-5x+6}$ en $+\infty$, puis en 0 ;

2. $x \longmapsto \dfrac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$;

3. $x \longmapsto \dfrac{x^5+2x^3}{3x^2+4x}$ en 0 ;

4. $x \longmapsto \ln(1+x^2+5x^4)$ en 0 puis en $+\infty$;

5. $x \longmapsto \lfloor x^2 \rfloor$ en $+\infty$;

6. $x \longmapsto \ln(1+x^2) + \cos x$ en $+\infty$ puis en 0 ;

7. $x \longmapsto \ln(x)$ en 1 ;

8. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{100}{x^3}$ en 0, en $+\infty$ puis en -1 ;

9. $x \longmapsto \sin(3x^2) + \ln(1+2x)$ en 0 ;

10. $x \longmapsto \sin(\mathrm{e}^{-x})$ en $+\infty$;

11. $x \longmapsto \ln(5x^2 + \mathrm{e}^{2x})$ en $+\infty$ puis en 0 ;

12. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{(x^2)}+3x^2}{x^5+\ln x}$ en $+\infty$ puis en 0.

Indication 21.3. **1.** Des équivalents du numérateur et du dénominateur sont donnés dans le cours.

2. Vous pouvez faire un changement de variable $y = x - \dfrac{\pi}{4}$ pour vous ramener à un équivalent en 0.

3. Même méthode que pour **1.**.

4. La méthode est dans le cours.

5. Encadrement.

6. En 0, le résultat est immédiat (il faut toujours calculer en premier lieu la limite...). En $+\infty$, vous pouvez montrer que $\ln(1+x^2)+\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x^2)$. Ensuite la méthode est dans le cours pour trouver un équivalent de $\ln(1+x^2)$.

7. Il faut se ramener à un équivalent en 0 via un changement de variable.

8. Rien de particulier.

9. Il faut repérer le terme dominant dans la somme.

10. Rapide.

11. En $+\infty$ la méthode est dans le cours. En 0 soyez vigilants ! On peut vite ajouter des équivalents sans s'en rendre compte ! Quand vous avez une somme, identifiez d'abord le terme dominant avant d'en déduire un équivalent.

12. En $+\infty$ le théorème des croissances comparées est utile. En 0 on peut s'en sortir par simples calculs de limites.

. . . .

Exercice 21.4. Trouver un équivalent simple des suites de terme général :

1. $\dfrac{n^4+2n^3-1}{3n+2}$;

2. $\exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$;

3. $\dfrac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$;

4. $\sqrt{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$;

5. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} + \dfrac{1}{4n^2}$;

6. $3 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \dfrac{6}{n}$;

7. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)}$;

8. $(n+\ln(n))\,\mathrm{e}^{-n+1}$;

9. $\ln(n+1) - \ln(n+2)$;

10. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$;

11. $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

12. $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)+\tan\left(\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$;

13. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

14. $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$;

15. $n^{1/n}-1$.

Indication 21.4. **1.** Rien à signaler.

2. Vous n'avez pas le droit d'ajouter des équivalents, mais des développements avec des petits o oui !

3. Rien à signaler.

4. Rien à signaler.

5. Rien à signaler.

6. Limite ?

7. Rien à signaler.

8. Qui est négligeable entre n et $\ln(n)$?

9. Vous pouvez simplifier avant de chercher un équivalent.

10. Limite ?

11. Vous pouvez trouver un équivalent de sh en 0 avant de commencer (la méthode est dans le cours).

12. Qui est négligeable entre les deux termes de la somme ?

13. Vous pouvez factoriser par $\sqrt{n-1}$ par commencer, puis chercher un équivalent de $\sqrt{1+\dfrac{2}{n-1}}-1$.

14. Mise au même dénominateur.

15. Forme exponentielle.

. . . .

Exercice 21.5. Soit $a \in \mathbf{R}^{\star}$. Déterminer un équivalent de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

Indication 21.5. Attention à ne pas appliquer une fonction à un équivalent !! Par contre, ce que vous pouvez faire, c'est appliquer une fonction à une limite ☺

. . . .

Exercice 21.6. Donner la factorisation de a^3-b^3 par $a-b$, où $(a,b)\in\mathbf{R}^2$. En déduire la limite de la suite u de terme général $u_n=(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}$. Retrouver ce résultat en utilisant les équivalents usuels.

Indication 21.6. Après factorisation la réponse est rapide. Avant de chercher un équivalent, vous pouvez factoriser par $n^{1/3}$ par exemple.

. . . .

Exercice 21.7. Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes au point indiqué en utilisant des équivalents :

1. $f(x)=\dfrac{e^{\cos(x)-1}-1}{x^2}$ en 0 ;

2. $g(x)=\dfrac{e^x-e}{x-\sqrt{x}}$ en 1 ;

3. $h(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)}$ en 2 ;

4. $k(x)=(1+x)^{1/x}$ en 0.

Indication 21.7. **1.** Changement de variable.

2. Changement de variable pour trouver un équivalent. Ensuite, pour calculer la limite, la forme conjuguée (pour des racines carrées) est utile.

3. Changement de variable pour les équivalents.

4. Forme exponentielle. Attention à ne pas appliquer une fonction (exponentielle par exemple ☺) à un équivalent ! Par contre, vous pouvez appliquer une fonction à une limite (on peut composer les limites).

. . . .

Exercice 21.8. En utilisant les équivalents, déterminer les limites, si elles existent, des suites de terme général :

1. $\ln(n)\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)\right)$;

2. $n\ln n - \dfrac{n^2+1}{\ln n} + \sqrt{n+3}$;

3. $\dfrac{\ln(n^4+n^2+1)}{n+3}$;

4. $\dfrac{\ln(1+\sin\frac{1}{n})}{\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}}$;

5. $\left(\exp\left(\sin\dfrac{1}{n}\right) - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln(n^3+n)$;

6. $n^3(\exp(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) - \sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}})$.

Indication 21.8. **1.** Qui est négligeable entre $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)$?

2. Qui est négligeable ? Une fois le terme repéré, vous pouvez factorisez par celui-ci si vous n'arrivez pas à rédiger avec des petits o.

3. Rapide si vous factorisez dans le logarithme.

4. Attention à bien écrire les équivalents dans le bon sens pour ne pas appliquer une fonction à un équivalent ! N'oubliez pas que vous pouvez élever des équivalents à n'importe quelle puissance.

5. Aucune fonction n'est négligeable entre $x \longmapsto \exp\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$ et $x \longmapsto \cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (pourquoi ?), donc il faut manipuler des développements avec des petits o pour conclure.

6. Avec la forme conjuguée vous pouvez montrer que $\exp(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Ensuite, vous pouvez obtenir avec des petits o que $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n}$ pour déterminer quel est le terme négligeable entre $\exp(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ et $\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}$.

Exercice 21.9. Utiliser des équivalents pour calculer les limites suivantes ($x \in \mathbf{R}$) :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$;

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$;

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$;

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2+5n-4}{n^2-3n+7}\right)^n$;

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$;

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$.

Indication 21.9. Il faut systématiquement revenir à la forme exponentielle et veiller à ne pas appliquer une fonction à un équivalent.

Exercice 21.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite positive telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{2(2n+1)}{\pi} \leqslant u_n^2 \leqslant \frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminer un équivalent de (u_n).

Indication 21.10. Vous pouvez d'abord chercher un équivalent de u_n^2 avec un célèbre théorème, puis conclure en élevant votre équivalent à la bonne puissance.

Exercice 21.11 (*Logarithme d'un équivalent*). **1.** Donner deux suites équivalentes (u_n) et (v_n) telles que $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ne soient pas équivalents.

2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et si la suite $(|\ln(v_n)|)$ est minorée par un nombre réel strictement positif alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Indication : (x_n) tend vers 1 si, et seulement si, la suite (x_n-1) tend vers 0.

3. Donner un équivalent de la suite de terme général $\ln(\sin(\dfrac{1}{n}))$.

Indication 21.11. **1.** Vous pouvez considérer une suite égale à 1 et une suite qui converge vers 1.

2. Vous pouvez majorer $\left|\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1\right|$ pour montrer que cette expression converge vers 0.

3. Méthode du cours (le point **2.** ne s'applique pas ici !).