TD 20 — Dérivabilité de fonctions

Étude de la dérivabilité

Exercice 20.1. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Que peut-on dire de f' si f est paire (resp. impaire, resp. périodique) ? Examiner la réciproque dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Indication 20.1.
- Si f est paire, alors quelle relation peut-on écrire par définition ? Il faut dériver cette relation pour conclure.
  La réciproque est vraie. Intégrer une certaine relation peut être utile !
- Si f est impaire, on montre que f' est paire de la même façon qu'au point précédent. La réciproque est fausse (il faut donc chercher un contre-exemple !).
- Si f est périodique, on peut montrer avec une démonstration similaire que f' est aussi T-périodique. La réciproque est fausse, vous pouvez considérer $f : x \longmapsto x + \sin(x)$ par exemple...

Exercice 20.2. Pour les fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, un ensemble sur lequel elles sont dérivables et l'expression de la dérivée.

1. $f_1 : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2)$;
2. $f_2 : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x\sqrt{1-x})$;
3. $f_3 : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+\operatorname{ch}(2x))}{x}$;
5. $f_5 : x \longmapsto 3^{4x^2-1}$;
6. $f_6 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1}{2\sin x - 1}}$.

Indication 20.2. Pour donner un ensemble sur lequel les fonctions sont dérivables, vous pouvez vous contenter d'appliquer les théorèmes d'opérations sur les dérivées.

Exercice 20.3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto \big||x-1| - 2\big|$.

Indication 20.3. Par composition, on peut montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de point. Il reste alors à étudier la dérivabilité en ces points (avec la définition).

Exercice 20.4. Déterminer si les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbf{R}$.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ -4x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
2. $g : x \longmapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Indication 20.4. Il peut être utile de vérifier la continuité en premier lieu !

Exercice 20.5. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right).$$

Indication 20.5. Vous pouvez simplifier l'expression de la fonction f sur $]0\,;1[$ d'une part, puis sur $]-1\,;0[$ d'autre part, pour obtenir $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$.

Exercice 20.6. Déterminer si les fonctions f suivantes définie sur $\mathbf{R}_+$ possèdent une dérivée en 0. Si c'est le cas, calculer $f'(0)$ et décider si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + \sqrt{x^5}}$; **2.** $f : x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$; **3.** $f : x \longmapsto \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Indication 20.6. On demande si les fonctions sont dérivables en un point et on s'intéresse à une régularité type $\mathscr{C}^1$, le théorème de la limite de la dérivée semble donc adapté !

Exercice 20.7. **1.** Montrer que la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

est prolongeable par continuité en 0. On désigne encore par f ce prolongement par continuité.

2. Montrer que la fonction f ainsi définie sur $]-1\,;+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^1$. On admettra qu'il existe $\varepsilon : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tel que pour tout $x > -1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

avec ε qui tend vers 0 en 0.

Indication 20.7. **1.** On a déjà vu la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

2. Vous pouvez utiliser le théorème de la limite de la dérivée. L'indication permet de montrer que

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Exercice 20.8. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ telle que $g(x^2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.

Indication 20.8. Vous pouvez raisonner par analyse/synthèse. Dans la phase d'analyse, vous pouvez montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, ce qui doit vous donner une idée pour une expression de g ! Pour la phase de synthèse, vous pourrez appliquer le théorème de la limite de la dérivée et remarquer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{f'(\sqrt{x}) - f'(0)}{2(\sqrt{x} - \sqrt{0})}$.

Exercice 20.9. Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, paire, 4-périodique telle que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) = x^2$ et pour tout $x \in]1\,;2]$, $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$.

1. Tracer f sur $[-5\,;6]$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $x \in [n\,;n+1]$, expliciter $f(x)$.

2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;2[$ et sur $]-2\,;0[$.

3. Expliciter f sur $]-1\,;1[$. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-2\,;2[$.

4. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

5. Déterminer les maxima locaux de f.

Indication 20.9. **1.** Vous pouvez distinguer des cas suivant le reste de la division euclidienne de n par 4.

2. Vous pouvez utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

3. f est-elle paire, impaire ?

4. Taux d'accroissement.

5. Rapide avec un tableau d'accroissement.

Exercice 20.10. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$. Introduisons la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si} \quad x \leqslant 1/2 \\ f(2x-1) & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

1. Montrer que g est une fonction continue.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que g soit dérivable sur $[0\,;1]$.

Indication 20.10. **1.** Méthode habituelle.

2. La CNS cherchée est la CNS pour que les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement soient égales et finies.

. . . . . .

Exercice 20.11 (*Recollement de solutions*). **1.** Trouver les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + |x|y = x.$$

2. Parmi ces solutions, lesquelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$?

Indication 20.11. **1.** Vous pouvez raisonner par analyse/synthèse. Dans la phase d'analyse, il faut résoudre (E) sur $\mathbf{R}_-^\star$ (ce qui donne un ensemble de solution dépendant d'un paramètre λ)1 et sur $\mathbf{R}_+^\star$ (ce qui donne un ensemble de solutions dépendant d'un paramètre μ). Enfin, on peut exploiter la continuité de f en 0 pour exprimer μ en fonction de λ.
Dans la phase de synthèse, il ne faut pas oublier de vérifier la dérivabilité de la fonction introduite !

2. Vous pouvez appliquer le théorème de la limite de la dérivée à f'' en 0 pour prouver qu'il y a une unique fonction convenable.

. . . . . .

Exercice 20.12. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$xf'(x) - 2f(x) = x^4.$$

Indication 20.12. Vous pouvez faire une analyse/synthèse. Dans la phase d'analyse, vous pouvez trouver l'expression d'une solution (l'expression change suivant qu'on est sur $\mathbf{R}_-^\star$, sur $\mathbf{R}_+^\star$ ou en 0).

Dérivées successives

. . . . . .

Exercice 20.13. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = x^n|x|$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

Indication 20.13. Vous pouvez montrer que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, H_p : « $f_n \in \mathscr{C}^p(\mathbf{R})$ et $f_n^{(p)} : x \longmapsto \operatorname{sgn}(x)\dfrac{(n+1)!}{(n+1-p)!}x^{n+1-p}$ » est vraie.

. . . . . .

Exercice 20.14 (*Formule de Vandermonde*). Soit n un entier naturel. On définit sur $\mathbf{R}$ la fonction f_n en posant $f_n(x) = x^n$.

1. Calculer les dérivées successives de f_n.

2. Calculer la dérivée d'ordre n de f_{2n} directement, puis en dérivant $f_{2n} = f_n \times f_n$ (et en utilisant la formule de Leibniz).

3. En déduire la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Indication 20.14. **1.** Conjecturer l'expression et la démontrer par récurrence (finie).

2. L'indication est déjà dans l'exercice !

3. Il faut évaluer l'égalité obtenue dans la question **2.** en un point bien choisi.

. . . . . .

Exercice 20.15. Les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition. Calculer leur dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$;

2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$;

3. $f_3 : x \longmapsto \sin(2x)$;

4. $f_4 : x \longmapsto (x^2 - 5x + 1)\mathrm{e}^{4x}$;

5. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$;

6. $f_5 : x \longmapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$;

7. $f_6 : x \longmapsto \sin^3(x) + \cos^3(x)$;

8. $f_7 : x \longmapsto x^3 \sin(x)$.

Indication 20.15. **1.** Il faut calculer les premiers termes pour conjecturer une formule, qu'on démontre ensuite par récurrence.

2. Vous pouvez faire le lien avec la question **1.**

3. Vous pouvez utiliser la partie imaginaire de $x \longmapsto \mathrm{e}^{2ix}$.

4. Quelle formule est utile pour la dérivée n-ième d'un produit ?

5. Vous pouvez commencer par une décomposition en éléments simples.

6. Même idée que pour **3.**.

7. Il faut d'abord changer l'expression de la fonction.

8. Quelle formule est utile pour la dérivée n-ième d'un produit ?

Exercice 20.16. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

3. Pouvez-vous généraliser les résultats obtenus ?

Indication 20.16. **1.** Méthode habituelle.

2. Méthode habituelle.

3. Récurrence (avec la méthode habituelle ☺).

Exercice 20.17. Soit $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. Introduisons la fonction $f_{n,\alpha}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_{n,\alpha} : x \longmapsto \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x} - \alpha) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{n,\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^\star$ et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions $f_{p,\beta}$, où $(p, \beta) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

2. Pour quelles valeurs de n la fonction $f_{n,\alpha}$

(a) admet-elle une limite en 0 ?

(b) est-elle continue en 0 ?

(c) est-elle dérivable en 0 ?

(d) est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?

(e) est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Indication 20.17. Il ne faut pas être effrayé par les notations, le problème revient simplement à utiliser la définition de continuité et de dérivabilité plusieurs fois.

Exercice 20.18. Soit $f : x \longmapsto -3\sin^2(x) + 5$ définie sur $D = \left[\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $[2\,;\,5]$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera les domaines de définition et de dérivabilité.

2. Calculer $g'\left(\dfrac{11}{4}\right)$.

Indication 20.18. **1.** Pour le signe de la dérivée une formule de trigonométrie peut rendre service !

2. L'expression de la dérivée est donnée par un résultat du cours. Trouver $g\left(\dfrac{11}{4}\right)$ revient à trouver l'unique solution d'une équation trigonométrique dans D.

Exercice 20.19. On note f la fonction définie sur $[0\,;\,1[$ par :

$$\forall x \in [0\,;\,1[, \quad f(x) = \operatorname{Arcsin}(x).$$

1. Montrer que f est solution sur $[0\,;\,1[$ de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 0.$$

2. La fonction f est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;\,1[$. À l'aide de la formule de Leibniz, prouver que les dérivées successives de f sont toutes positives ou nulles.

Indication 20.19. **1.** Rien à signaler.

2. L'équation différentielle se réécrit

$$f'' \times h = f' \times g$$

où $h : x \longmapsto 1 - x^2$ et $g : x \longmapsto x$. En appliquant le théorème de Leibniz de chaque côté on obtient pour tout $x \in [0\,;\,1[$,

$$f^{(n+2)}(x) = \frac{1}{(1-x^2)}\Big(x(1+2n)f^{(n+1)}(x) + (x + n(n-1))f^{(n)}(x)\Big).$$

On conclut ensuite par récurrence (double).

Propriétés des fonctions dérivables

. . . . . .

Exercice 20.20. Soit a, b deux réels avec $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, dérivables sur $]a\,;\,b[$. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a\,;\,b[$ tel que

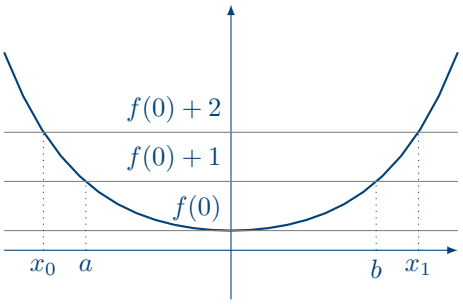
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Indication 20.20. Vous pouvez considérer $F : x \longmapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ et lui appliquer un célèbre théorème du cours.

. . . . . .

Exercice 20.21. Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbf{R}$, admettant $+\infty$ pour limite en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f' s'annule.

Indication 20.21. Voici un dessin pour vous aider :



. . . . . .

Exercice 20.22. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[0\,;\,+\infty]$, dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On suppose que f tend vers $f(0)$ en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Indication 20.22. **1.** Utiliser d'abord la limite pour justifier que f est bornée au voisinage de $+\infty$. Ensuite, il reste à montrer que f est bornée sur un segment...

2. Si pour tout $a > 0$, $f(a) = f(0)$ alors le résultat est évident (pourquoi ?). Sinon, il existe $a > 0$ tel que $f(a) \neq 0$. Vous pouvez appliquer le TVI puis son extension sur deux intervalles bien choisi pour obtenir qu'il existe $x_0 < x_1$ avec $f(x_0) = f(x_1)$. Ensuite, il reste un théorème à appliquer pour conclure !

. . . . . .

Exercice 20.23. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a\,;\,b]$, dérivable sur $[a\,;\,b]$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a\,;\,b[$ tel que la droite passant par $(a, f(a))$ et $(c, f(c))$ soit tangente à la courbe représentative de f.

On pourra considérer la fonction φ définie sur $[a\,;\,b]$ par $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si $x \neq a$ et $\varphi(a) = 0$.

Indication 20.23. Quel théorème pourrait on appliquer à φ ? Attention, la continuité en 0 de φ est à bien vérifier.

Exercice 20.24. **1.** Soit I un intervalle ouvert et f une fonction numérique définie et dérivable sur I. Supposons que f' admette au plus k zéros distincts sur I, avec $k \geqslant 1$. Démontrer que f admet au plus $k+1$ zéros distincts sur I.

2. En déduire le nombre maximal de solutions réelles de l'équation :

$$x^n + ax + b = 0,$$

où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N} \backslash \{0; 1\}$.

Indication 20.24. **1.** Vous pouvez montrer la contraposée.

2. Il faut appliquer la question **1.**

Exercice 20.25. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbf{R}$ telle qu'il existe deux réels a et b distincts, vérifiant

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel c compris entre a et b tel que $f^{(3)}(c) = 0$.

Indication 20.25. Théorèmes de Rolle en cascade !

Exercice 20.26. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

1. $\sqrt{10\ 001} \approx 100$; **2.** $\dfrac{1}{0,999^2} \approx 1$; **3.** $\cos(1) \approx \dfrac{1}{2}$.

Indication 20.26. **1.** Vous pouvez introduire $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$, majorer $|f'|$ et appliquer l'inégalité des accroissements finis (version 2) pour obtenir $\left|\sqrt{10\ 001} - 100\right| \leqslant 0,05$.

2. Même idée. Vous pouvez majorer $0,999^3$ en remarquant que $0,999^3 = (1-,001)^3$. N'ayez pas peur de poser certains calculs !

3. Idem. Il faut connaître $\sqrt{3} \approx 1,732$ et $\pi \approx 3,141$.

Exercice 20.27. Montrer que pour tous $x, y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$|\tan(x) - \tan(y)| \geqslant |x - y|\,.$$

Indication 20.27. On ne peut pas appliquer directement l'inégalité des accroissements finis sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$. L'idée consiste à se donner x et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $x < y$, puis à travailler sur $[a\,;\,b]$, (où $a = \tan(x)$ et $b = \tan(y)$) avec la fonction Arctan.

Exercice 20.28. On introduit la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. En déduire un encadrement du terme général de la suite (S_n), puis montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Indication 20.28. **1.** Trouver une fonction dont la dérivée est $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et lui appliquer l'IAF (première version).

2. Il faut encadrer $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ à partir des inégalités de la question précédente, puis sommer ces encadrements avant de conclure !