

TD 19

CONTINUITÉ DE
FONCTIONS

Continuité et prolongement par continuité

Exercice 19.1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ (2x+b)^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbf{R}$.

Indication 19.1. La continuité à gauche et à droite en -2 est utile.

Exercice 19.2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x - |x|}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que la fonction f est bornée.
2. Calculer, si elle existe, la limite de f en 0.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}_+^* \setminus \mathbf{N}^*$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer, si elle existe, la limite de f à gauche en n , puis à droite en n . La fonction f est-elle continue en n ?

Indication 19.2. 1. Vous pouvez distinguer deux cas : $x \geq 1$ et $0 < x < 1$.

2. Si $x \in]0; 1[$, $f(x)$ est simplifiable.
3. $\bigcup_{m=0}^{+\infty}]m; m+1[= \mathbf{R}_+^* \setminus \mathbf{N}^*$, donc la question revient à justifier que f est continue sur $]m; m+1[$ pour tout $m \in \mathbf{N}$.
4. Il faut simplifier $f(x)$ suivant que $x \in]n; n+1[$ ou $x \in]n-1; n[$.

Exercice 19.3. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|f(x)| \leq |\sin(x)|.$$

Cette application est-elle continue en 0 ?

Indication 19.3. Il faut utiliser la définition.

Exercice 19.4. Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Indication 19.4. On a une différence de racines carrées, donc une transformation bien connue est utile. De plus, que vaut $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin(u)}$?

Exercice 19.5. Donner le domaine de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes. Vous préciserez si les fonctions sont prolongeables aux extrémités de leur ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto [x] + (x - [x])^2$;
2. $g : x \mapsto \sqrt{(x-1) \ln(x^2 - 3x + 2)}$.

Indication 19.5. Rien à signaler.

Exercice 19.6. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto (1 + 2x)^{1/x}$. Vous préciserez si on peut prolonger cette fonction en chaque extrémité de son ensemble de définition.

Indication 19.6. Que vaut $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$?

Exercice 19.7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité en les extrémités finies de leur intervalle de définition ?

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $a :]-1; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$
$x \longmapsto \frac{x^3 + 6x + 7}{x^3 + 1}$ | 2. $b :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$
$x \longmapsto \frac{(1+x)^n - 1}{2x}$ | 3. $c :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$
$x \longmapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$ |
| 4. $d :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbf{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{2 + 2^{\tan x}}$ | 5. $e :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$
$x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ | 6. $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$
$x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ |

Indication 19.7. C'est un exercice de calcul de limites !

- Les polynômes au numérateur et au dénominateur ont une racine commune : factoriser ces deux polynômes pour simplifier.
- Vous pouvez montrer, avec un taux d'accroissement, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$.
- Que valent $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u}$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{e^u - 1}$?
- Il n'y a pas de forme indéterminée.
- Sinus admet-elle une limite en $+\infty$?
- Encadrer.

Exercice 19.8. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $\mathbf{R}$. On note $\max(f, g)$ la fonction $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$. Montrer que

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

En déduire que $\max(f, g)$ est une fonction continue, puis que la fonction $\min(f, g)$ est continue.

Indication 19.8. En distinguant des cas, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \max(f(x), g(x))$.

En déduire que $\max(f, g)$ est continue est alors immédiat.

Que vaut $\max(f, g) + \min(f, g)$? Vous pouvez en déduire que $\min(f, g)$ est continue rapidement ensuite.

Caractérisation séquentielle de la continuité

Exercice 19.9. Soit f une fonction continue en 0 vérifiant pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = f(2x).$$

Montrer que f est constante.

Indication 19.9. Si $x \in \mathbf{R}$ est fixé, vous pouvez introduire pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. La suite u est constante (à montrer !). Quelle est sa limite ?

Exercice 19.10. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall q \in \mathbf{Q}, \quad f(q) = g(q).$$

Montrer que $f = g$.

Indication 19.10. Si $x \in \mathbf{R}$, on peut se rappeler que $\frac{\lfloor 10^n \cdot x \rfloor}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ (suites des valeurs approchées par défaut, cf. le chapitre sur les nombres réels) en remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{\lfloor 10^n \cdot x \rfloor}{10^n} \in \mathbf{Q}$.

Exercice 19.11. On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2x+1) = f(x)$.

1. On considère une suite u définie par la donnée de son premier terme $u_0 = x \in \mathbf{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}.$$

- (a) Montrer que u converge et déterminer sa limite.
 (b) Soit $f \in E$. Montrer que la suite de terme général $f(u_n)$ est constante. En déduire que f est une fonction constante.

2. Conclure.

Indication 19.11. 1. (a) Suite usuelle.

(b) Il faut montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_{n+1}) = f(u_n)$. Il faut ensuite utiliser la question 1.(a).

2. Il reste la synthèse à faire.

Exercice 19.12 (Équation fonctionnelle de Cauchy). Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des applications continues f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. On suppose $E \neq \emptyset$. Soit $f \in E$.

- (a) Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est impaire.
 (b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(nx) = nf(x)$. Montrer que cette relation est encore valable pour $n \in \mathbf{Z}$.
 (c) Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
 (d) En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = xf(1)$.

2. Montrer que $E = \{x \mapsto ax : a \in \mathbf{R}\}$.

Indication 19.12. 1. (a) Que vaut $f(1+0)$? Que vaut $f(x-x)$?

(b) Récurrence, puis parité de f .

(c) Si $r \in \mathbf{Q}$, alors il existe $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. Vous pouvez utiliser la question précédente (plusieurs fois) pour montrer que $qf(r) = pf(1)$.

(d) La suite des valeurs approchées par défaut est utile.

2. On a démontré une certaine inclusion d'ensemble (ce qui revient à faire une analyse), il reste donc à obtenir l'autre inclusion, facile (ce qui revient à faire une synthèse).

Les trois grands théorèmes sur la continuité

Exercice 19.13. Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I . On suppose que $f(I)$ est un ensemble de cardinal au plus 2. Montrer que f est constante.

Indication 19.13. Vous pouvez raisonner par l'absurde et supposer $f(I)$ possède deux éléments distincts. Vous pouvez alors montrer que $f(I)$ possède un élément de plus (ou une infinité suivant le type d'argument employé!).

Exercice 19.14. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Indication 19.14. Vous pouvez chercher à appliquer le théorème de la bijection à $g : x \longmapsto f(x) - x$. Pour bien faire les calculs de limites, le théorème de la limite monotone est utile!

Exercice 19.15. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbf{R}$, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$. Admet-elle un maximum, un minimum?

Indication 19.15. Avec les définitions des limites, vous pouvez encadrer f dans des voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$. Il reste ensuite à encadrer f sur un segment de la forme $[\eta; \eta']$: un théorème du cours permet alors de conclure.

Exercice 19.16. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, à valeurs réelles et p et q deux nombres réels positifs. Montrer que

$$\exists c \in [a; b], \quad pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c).$$

Indication 19.16. Le problème revient à montrer que $g : x \longmapsto pf(a) + qf(b) - (p + q)f(x)$ s'annule.

Exercice 19.17. Montrer que la fonction f définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = (1 - x) \sin \frac{\pi}{x}$ est bornée. Atteint-elle ses bornes?

Indication 19.17. Montrer que f est bornée peut se faire de manière directe. Montrer que f n'atteint pas ses bornes est plus délicat : il faut trouver les bornes supérieure et inférieure de f . Pour cela, vous pouvez chercher à construire une suite (u_n) (resp. (v_n)) telle que $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (resp. $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$).

Exercice 19.18. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0; 2]$ vérifiant $f(0) = f(2)$. Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = f(c + 1)$.

Indication 19.18. Considérer $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto f(x + 1) - f(x)$.

Exercice 19.19. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On suppose que $f \times f$ est constante sur I . Montrer que f est constante sur I .

Indication 19.19. Il faut distinguer le cas où f s'annule. Sinon, que peut-on dire du signe de f ?

Exercice 19.20. Soit I un segment de $\mathbf{R}$ et f et g deux applications continues de I dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel δ strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) + \delta \leq g(x).$$

Indication 19.20. Vous pouvez introduire $h = g - f$ et montrer que cette fonction admet un minimum δ en un réel c .

Exercice 19.21. Un promeneur parcourt 6 km en une heure. Montrer qu'il existe au moins une période de 30 minutes au cours de laquelle il parcourt exactement 3 km.

Indication 19.21. Vous pouvez vous intéresser à $f : [0, 30] \rightarrow \mathbf{R}$
 $t \mapsto$ la distance parcourue entre t et $t + 30$ min.

Exercice 19.22. 1. Montrer que pour tout nombre réel x strictement supérieur à e , l'équation

$$y - x \ln(y) = 0$$

d'inconnue $y \in]x; +\infty[$, admet une unique solution. Pour tout $x > e$, on note $f(x)$ cette solution.

2. Montrer que la fonction f ainsi définie sur $]e; +\infty[$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer celle-ci.
3. Prouver que f est une fonction croissante.

Indication 19.22. Soyez vigilant et ne mélangez pas les variables! Sinon rien de particulier.
.....

Exercice 19.23. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
$$x \longmapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R})$.
2. Expliciter $f(\mathbf{R})$ et f^{-1} .

Indication 19.23. 1. Il faut voir quel théorème utiliser ici!

2. La méthode a été vue dans un chapitre précédent.
.....

Exercice 19.24. On considère la fonction f définie sur $I = [-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^3}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur I , et démontrer que sa bijection réciproque, notée g , est continue sur I .
2. Montrer que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$, puis trouver la limite de $\frac{x^{2/3}}{g(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Indication 19.24. 1. Y a-t-il vraiment besoin de préciser le théorème à utiliser?

2. La méthode pour trouver la limite de g est dans le cours.

Vous la limite de $\frac{x^{2/3}}{g(x)}$, vous pouvez commencer par chercher celle de $f(x)x^{-3/2}$ en $+\infty$.