

TD 18

LIMITES DE FONCTIONS

Exercice 18.1. Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes au point indiqué.

1. $x \mapsto x - 2\sqrt{x}$ en $+\infty$;
2. $x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$;
3. $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0;
4. $x \mapsto \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ en $+\infty$;
5. $x \mapsto \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$;
6. $x \mapsto \frac{x^3 \ln(x) + e^x}{\ln(x)^2 + x^2}$ en $+\infty$;
7. $x \mapsto \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ en 0;
8. $x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$;
9. $x \mapsto \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$;
10. $x \mapsto \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$;
11. $x \mapsto \frac{e^{3x+1}}{\ln(x)^4}$ en $+\infty$;
12. $x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ en 0^+ ;
13. $x \mapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0;
14. $x \mapsto x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ en $+\infty$;
15. $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+1}$ en $+\infty$;
16. $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+1}$ en 0;
17. $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ ;
18. $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ ;
19. $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ ;
20. $x \mapsto \frac{\sin(x \ln(x))}{x}$ en $+\infty$;
21. $x \mapsto \frac{x^2+1}{\sin^2(x)}$ en 0;
22. $x \mapsto \frac{e^{2x} + x^2}{x^3 + (\ln(x))^2}$ en $+\infty$;
23. $x \mapsto \left(\frac{1}{x} + e^x\right) (\operatorname{sh}(x) + x^2)$ en $-\infty$;
24. $x \mapsto \frac{x^3-1}{x-1}$ en 1;
25. $x \mapsto \frac{\ln(2^x)}{x+1}$ en $+\infty$;
26. $x \mapsto \ln(x+2) - \ln(x-1)$ en $+\infty$;
27. $x \mapsto (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 3$ en 0;
28. $x \mapsto x^x$ en 0;
29. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0;
30. $x \mapsto \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$ en $\frac{\pi}{3}$;
31. $x \mapsto e^{1/x}$ en 0;
32. $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0^+ ;
33. $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0^- ;
34. $x \mapsto \frac{x^2 + x \sin(x)}{3x^2 + (1 + \operatorname{Arctan}(x))^2}$ en $-\infty$;
35. $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en 0;
36. $x \mapsto x^{1/x}$ en 0.

Indication 18.1. Voici les réponses (des pistes pour les obtenir sont données après).

1. $+\infty$
2. 0
3. 1
4. 1

5. 1	6. $+\infty$	7. $\frac{3}{2}$	8. $\frac{1}{4}$
9. 2	10. pas de limite	11. $+\infty$	12. $+\infty$
13. 0	14. 2	15. 0	16. 0
17. pas de limite	18. pas de limite	19. 0	20. 0
21. $+\infty$	22. $+\infty$	23. $+\infty$	24. 3
25. $\ln(2)$	26. 0	27. $+\infty$	28. 1
29. 1	30. $-\sqrt{3}$	31. 0	32. $+\infty$
33. $-\infty$	34. $\frac{1}{3}$	35. pas de limite	36. 0

Quelques pistes pour trouver ces réponses :

- Factorisation.
- C'est une différence de racines carrées, on peut donc utiliser la forme...
- Encadrement.
- Différence de racines carrées.
- Il faut déjà écrire la forme exponentielle. Ensuite, il faut faire apparaître explicitement le théorème des croissances comparées, ce qui est un peu technique.
- Factorisation.
- $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = \dots ?$
- $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = \dots ?$
- Factorisation. Si vous avez un doute sur les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur, faites plusieurs essais!
- Vous pouvez commencer par utiliser une formule de trigonométrie, puis que le produit d'une fonction qui converge vers un réel non nul et d'une fonction qui n'a pas de limite n'a pas de limite (pourquoi?). DE même, la somme d'une fonction qui converge et d'une fonction qui n'a pas de limite n'a pas de limite (pourquoi?). On rappelle que $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- Il faut faire apparaître soigneusement le théorème des croissances comparées.
- $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \dots ?$
- $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = \dots ?$ Un encadrement est aussi utile.
- Factorisation et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \dots ?$
- Factorisation.
- Rien à signaler.
- Théorème de caractérisation séquentielle de la limite. Si f est la fonction proposée et que vous trouvez une suite u telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite, alors vous pouvez conclure que f n'a pas de limite.
- Théorème de caractérisation séquentielle de la limite.
- Encadrement.
- Encadrement.
- Rien à signaler.
- Factorisation.
- Il faut réécrire sh à l'aide d'exponentielle puis factoriser.
- Factorisation.
- Factorisation.
- Factorisation.
- Factorisation.

28. Rien à signaler.

29. Différence de racines carrées..

30. On connaît pas mal de limites en zéro, donc on peut s'y ramener en introduisant $h = x - \frac{\pi}{3}$ puis en exprimant $\frac{\sin(3x)}{1 - 2\cos(x)}$ uniquement avec h (l'expression obtenue pourra être simplifier via les formules de trigonométrie). Une autre façon de faire est de ne pas introduire h et de travailler directement avec les formules de trigonométrie.

31. Calculer séparément les limites à gauche et à droite.

32. Rien à signaler.

33. Rien à signaler.

34. Factorisation et théorème des gendarmes (deux fois).

35. Calculer séparément les limites à gauche et à droite.

36. Rien à signaler.

Exercice 18.2. Déterminer l'ensemble de définition, puis les asymptotes éventuelles des fonctions suivantes :

$$1. f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}; \quad 2. f_2 : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}; \quad 3. f_3 : x \mapsto \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x - 1}.$$

Indication 18.2. Il faut déterminer les limites et interpréter graphiquement le résultat.

1. Rien à signaler.

2. Il faut factoriser sous la forme $f_2(x) = x \times h(x)$, où $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha$ (avec α à déterminer!). Vous pouvez alors montrer que $f_2(x) - \alpha x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \beta$ (avec β à déterminer!) pour en déduire que $y = \alpha x + \beta$ est une équation de l'asymptote oblique de $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ (même travail en $-\infty$).

3. Même méthode. Pensez aussi aux éventuelles asymptotes verticales.

Exercice 18.3. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbf{R}$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Indication 18.3. Quelle est la limite de $(f(x + nT))_{n \in \mathbf{N}}$?

Exercice 18.4. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^+$, croissante, telle que la suite $(f(n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Indication 18.4. Il y a plusieurs méthodes. Vous pouvez utiliser la définition ou la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 18.5. Soit $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ une application croissante, non identiquement nulle, et vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Montrer que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, puis que f admet $-\infty$ comme limite en 0. Quel résultat intéressant est ainsi démontré ?

Indication 18.5. Vous pouvez suivre le plan suivant pour la limite en $+\infty$:

1. montrer que $f(2) = 1$;

2. en raisonnant par l'absurde, en déduire qu'il existe $a > 1$ tel que $f(a) > 0$;

3. montrer que pour $x \geq a^n$, on a $f(x) \geq nf(a)$ puis conclure.

On peut déduire la limite en $-\infty$ de la précédente en remarquant que $-f(\frac{1}{x}) = \dots$

Exercice 18.6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple explicite.

1. Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de $+\infty$. Si f est strictement positive au voisinage de $+\infty$, alors la limite de f en $+\infty$, si elle existe, est strictement positive.
2. Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de a , sauf peut-être en a . Si f est bornée au voisinage de a , alors f admet une limite finie en a .
3. Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, alors f est décroissante au voisinage de $-\infty$.
4. Une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$ a une limite en $+\infty$.
5. Une fonction décroissante sur $\mathbf{R}$ et majorée a une limite finie en $-\infty$.
6. Une fonction croissante sur $]0; +\infty[$ est minorée.
7. Si f est une fonction croissante sur $\mathbf{R}$, alors $f(x+1) - f(x)$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Indication 18.6. Les trois premières assertions sont fausses, les deux suivantes sont vraies et la sixième est fausse. Pour la septième, considérer $f : x \mapsto 2x + \sin(x)$ par exemple.