

TD 17

POLYNÔMES

Généralités

.....

Exercice 17.1. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Déterminer le degré du polynôme :

$$P(X+1) - P(X)$$

en fonction du degré de P .

Indication 17.1. Quel est le coefficient de degré n de $P(X+1) - P(X)$?

Celui de degré $n-1$?

.....

Exercice 17.2. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-1/x}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P}_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}.$$

Indication 17.2. Par récurrence. Attention à bien poser l'hypothèse de récurrence.

Équations fonctionnelles

.....

Exercice 17.3. 1. Déterminer un polynôme de degré au plus 1 vérifiant $P(2) = 2$ et $P(3) = -1$.
2. Déterminer un polynôme de degré au plus 2 vérifiant $P(-1) = 3$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 0$.

Indication 17.3. Il faut introduire les coefficients et les déterminer par identification (il y a des systèmes à résoudre).
.....

Exercice 17.4. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$4P = (X-1)P' + P''.$$

Indication 17.4. Analyse/synthèse. Dans la phase d'analyse, cherchez d'abord le degré, puis introduisez le bon nombre de coefficient et trouvez-les par identification.
.....

Exercice 17.5. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$18P = P'P''.$$

Indication 17.5. Analyse/synthèse. Dans la phase d'analyse, cherchez d'abord le degré, puis introduisez le bon nombre de coefficient et trouvez-les par identification.
.....

Exercice 17.6. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des polynômes P à coefficients réels vérifiant

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1.$$

1. Soit $P \in E$. On introduit la suite u définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Montrer que $P(u_n) = u_n^2 + 1$ pour tout entier naturel n . En déduire que $P = X^2 + 1$.
2. Conclure.

Indication 17.6. 1. Récurrence.

2. Il reste la synthèse à faire.

Exercice 17.7. 1. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels tel que

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

- (a) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de P . Montrer que α^2 est une racine de P et en déduire que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
 - (b) Montrer que 0 n'est pas racine de P .
 - (c) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de P . Montrer que $|\alpha + 1| = 1$.
 - (d) En déduire les racines de P ainsi que la forme du polynôme P .
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

Indication 17.7. 1. (a) On a immédiatement α^2 racine de P . En itérant, on trouve que α^4, α^8 , etc. sont des racines de P . Supposons $\alpha \neq 0$. Il faut alors justifier que $n \mapsto \alpha^{2^n}$ est non injective et utiliser cette propriété pour obtenir $b \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha^b = 1$.

(b) On raisonne par l'absurde. On introduit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$. Il faut montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(u_n) = 0$, $u_n \in \mathbf{R}_+$ et en déduire le sens de variation de u . Avec ces informations, on peut obtenir une contradiction.

(c) Calculer $P((\alpha + 1)^2)$.

(d) Si α est une racine de P , alors $|\alpha| = 1 = |\alpha + 1|$, ce qui permet de déterminer que $\alpha \in \{j, j^2\}$. Ainsi il existe $(\lambda, n, p) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}^2$ tel que $P = \lambda(X - j)^n(X - j^2)^p$. En utilisant la relation $P(X)^2 = P(X)P(X-1)$ et l'unicité de la décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles, on peut calculer λ et exprimer n en fonction de p .

2. Il faut mener la phase de synthèse, puis conclure.

Exercice 17.8. 1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(E) : (1 + X^2)^2 P'' - 2X(1 + X^2)P' + 2(X^2 - 1)P = 0.$$

On s'intéressera au monôme de plus haut degré et à son coefficient dans le membre de gauche de l'égalité quand P est un polynôme de degré n , avec $n \geq 2$.

2. En déduire une solution particulière non-nulle de l'équation différentielle

$$(1 + t^2)^2 y'' - 2t(1 + t^2)y' + 2(t^2 - 1)y = 0.$$

Indication 17.8. 1. Le degré du terme de gauche est $d + 2$. On doit obtenir que $d = 1$ ou 2.

Ensuite, il faut traiter les deux cas séparément.

Les solutions sont les $a(X^2 + 1)$ avec $a \in \mathbf{R}$.

2. Il suffit de choisir un polynôme trouvé question 1.

Exercice 17.9. Trouver tous les polynômes de $\mathbf{R}_3[X]$ tels que

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 1.$$

Indication 17.9. Le seul polynôme convenable est : $\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X + 1$

Exercice 17.10 (Interpolation de Lagrange). Soit $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux n -uplets de nombres réels tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \tilde{P}(a_k) = b_k.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère le polynôme Q_j défini par

$$Q_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

Enfin on définit le polynôme L , appelé **polynôme de Lagrange** associé aux n -uplets $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, par

$$L(X) = \sum_{j=1}^n b_j Q_j(X).$$

1. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que vaut $\tilde{Q}_j(a_i)$?
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que vaut $\tilde{L}(a_k)$?
3. Montrer que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{P}(a_k) = b_k$ alors $P = L$.
4. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{P}(a_k) = b_k$. En considérant le polynôme $P - L$, déterminer la forme de P .

Indication 17.10. 1. Ça dépend de si $i = j$ ou pas.

2. b_k .
3. Penser racines et degré.
4. Penser racines.

Divisibilité

Exercice 17.11. 1. Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^3 + 7X^2 - 2$ par $B(X) = X^2 + X + 1$.

2. En déduire les éventuelles asymptotes obliques de la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 7x^2 - 2}{x^2 + x + 1}.$$

Indication 17.11. Résultat de la division euclidienne : $X^3 + 7X^2 - 2 = (-7X - 8) + (X + 6)(X^2 + X + 1)$.

Exercice 17.12. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Indication 17.12. Le reste doit être nul.

La condition est $a = c = b + 1$.

Exercice 17.13. Trouver le reste de la division euclidienne de

1. $X^{2n} + X^n - 1$ par $X - 2$ puis par $X^2 - 4$, où $n \in \mathbf{N}^*$;
2. $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X - 1)^2$, où $n \geq 2$.

Indication 17.13. Ne pas poser les divisions euclidiennes... il y a des « n ».

1. Si n est pair, le reste de la division de P_n par $X^2 - 4$ est $2^{2n} + 2^n - 1$.
Si n est impair, le reste de la division de P_n par $X^2 - 4$ est $2^{n-1}X + 2^{2n} - 1$.

2. Utiliser une formule de Taylor en 1.

Le reste de la division euclidienne de T_n par $(X-1)^2$ est $(n^2+2)X - n^2 + n + 1$.

Exercice 17.14. 1. Pour tout entier naturel n , déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 5X + 6$, puis le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $X^2 - 4X + 4$.

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(A - I_2)(A - 2I_2) = 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X-1)(X-2)$, et en déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n .

3. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'unique réel λ tel que $B - \lambda I_2$ soit non inversible, puis montrer que $(B - \lambda I_2)^2 = 0$. En déduire l'expression de B^n pour tout entier naturel n .

Indication 17.14. Pour trouver le reste de la division de X^n par un polynôme B de degré 2, il faut écrire le théorème de la division euclidienne ($X^n = QB + R$) et écrire le reste comme $R = aX + b$. Les coefficients A et B sont ensuite à déterminer par identification (on peut par exemple évaluer l'égalité $X^n = QB + R$ en les racines de B).

Ensuite, pour trouver la puissance de la matrice, on « remplace » X par la matrice dans l'expression de X^n obtenue avant.

Exercice 17.15. Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$?

Indication 17.15. Posons $P_n = X^{2n} + X^n + 1$. Si $X^2 + X + 1$ divise P_n si et seulement si les $\tilde{P}_n(\alpha) = 0$ pour toute racine α de $X^2 + X + 1$.

Exercice 17.16. Posons

$$A = 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 \quad \text{et} \quad B = 4X^3 + 4X^2 - X - 1.$$

Montrer que les polynômes A et B ont une racine commune et la déterminer.

Indication 17.16. Il faut introduire Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B . Si $A = QB + R$, alors toute racine commune de A et B est aussi racine de ...

Racines

Exercice 17.17. Soit P un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ et a un nombre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et a pour que a soit une racine triple du polynôme :

$$Q(X) = (X - a)(P'(X) + \tilde{P}'(a)) - 2(P(X) - \tilde{P}(a)).$$

Indication 17.17. La condition est $\tilde{P}^{(3)}(a) \neq 0$.

Exercice 17.18. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.

2. Montrer que pour tout $n, p, q \in \mathbf{N}$, $1 + X + X^2$ divise $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$.

Indication 17.18. 1. Ne pas poser la division euclidienne.

2. Quelles sont les racines de $1 + X + X^2$?

Exercice 17.19. Effectuer la division euclidienne du polynôme

$$P = 6X^4 - 49X^3 + 123X^2 - 98X + 24$$

par le polynôme

$$T = X^2 - 7X + 12.$$

En déduire les racines du polynôme P .

Indication 17.19. Écrire la division euclidienne euclidienne pour factoriser P . Les racines sont ensuite rapides à obtenir.
.....

Exercice 17.20. Déterminer les racines du polynôme

$$P = 2X^3 - 17X^2 + 40X - 16,$$

sachant que celui-ci admet une racine double.

Indication 17.20. Pas d'indication.
.....

Exercice 17.21. Démontrer que le polynôme $X^3 - 3X + 1$ admet trois racines réelles distinctes.

Indication 17.21. Un célèbre théorème d'analyse permet d'obtenir qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle donné. Vous pouvez appliquer trois fois ce théorème!
.....

Exercice 17.22. Déterminer les racines du polynôme

$$P = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i,$$

sachant que celui-ci admet une racine réelle.

Indication 17.22. Si x_0 est la racine réelle, vous pouvez considérer $\Im m(\tilde{P}(x_0))$.
.....

Exercice 17.23. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que 1 est racine du polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et déterminer son ordre de multiplicité.

Indication 17.23. Vous pouvez utiliser le critère avec les dérivées successives. Attention, il faut distinguer des cas suivant les valeurs de n .
.....

Exercice 17.24. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

Indication 17.24. Raisonnement par l'absurde.
.....

Exercice 17.25. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que $\tilde{P}(0)^2 + \tilde{P}(1)^2 + \tilde{P}(4)^2 + \tilde{P}(7)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Indication 17.25. Penser racines.
.....

Exercice 17.26. Déterminer les racines du polynôme $X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que deux de ses racines sont de somme égale à la troisième.

Indication 17.26. Il faut utiliser les relations coefficients/racines pour trouver la troisième racine, puis factoriser.
.....

- Exercice 17.27.** 1. Soit $P(X) = n_d X^d + \dots + n_1 X + n_0$ un polynôme de degré $d \geq 1$ à coefficients entiers. Montrer que si P admet une racine N qui est un nombre entier, alors nécessairement N divise n_0 .
2. Donner, si elles existent, les racines entières de $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et de $X^{10} + X^5 + 1$.

Indication 17.27. 1. C'est quoi une racine ?

2. Il s'agit de la question 2. Elle vient donc après la question 1.

Exercice 17.28. Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2 , P_3 et P_4 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, P_n est un polynôme de degré $n - 1$ à coefficient dans $\mathbf{Z}$ et dont on précisera le coefficient dominant.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction polynomiale $\widetilde{P}_n$ est de même parité que $n - 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$. En déduire que P_n et P_{n+1} n'ont pas de racine commune.

Indication 17.28. 1. $P_2 = X$, $P_3 = X^2 - 1$, $P_4 = X^3 - 2X$

2. Par récurrence... (double bien sûr). Le coefficient dominant peut se voir question 1.
3. Par récurrence.
4. Par récurrence.

Factorisation

- Exercice 17.29.** 1. Vérifier que $1 + i$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3 - (4 + i)X^2 + (6 + 2i)X - (4 + 2i)$ et en déduire la décomposition de P dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Vérifier que i est racine du polynôme $Q(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ et en déduire la décomposition de Q dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Indication 17.29. 1. $P = (X - (1 + i))(X - (1 - i))(X - (2 + i))$

2. La décomposition de Q dans $\mathbf{R}[X]$ est $Q = (X - 2)(X - 3)(X^2 + 1)$.
Dans $\mathbf{C}[X]$, $Q = (X - 2)(X - 3)(X - i)(X + i)$.

Exercice 17.30. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P_1 = X^5 - 1$;
2. $P_2 = X^4 + 4X^2 + 3$;
3. $P_3 = 2X^4 - 6X^2 + 5$;
4. $P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$;
5. $P_5 = (X^2 - 3X - 1)^2 + (4X - 5)^2$;
6. $P_6 = \sum_{k=0}^3 (X^{2k+1} - X^{2k})$;
7. $P_7 = (2X^2 + 1)^3 + (X^2 + 2)^3$;
8. $P_8 = X^6 + 1$;
9. $P_9 = (X + 1)^n - (X - 1)^n$;
10. $P_{10} = X^4 - 2X^3 + X^2 - 4X + 4$;
11. $P_{11} = X^4 - 1$;
12. $P_{12} = X^5 + 1$;
13. $P_{13} = X^4 + X^2 + 1$.

Indication 17.30. 1. Sur $\mathbf{C}[X]$: on peut commencer par résoudre $z^5 = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ (les solutions sont dans le cours sur les complexes!).

Pour déduire de la factorisation sur $\mathbf{C}[X]$ celle sur $\mathbf{R}[X]$, on peut utiliser $(X - e^{i\theta})(X + e^{i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.

2. Polynôme « bicarré » avec des racines réelles.

3. Polynôme « bicarré » sans racines réelles. Il faut d'abord factoriser sur $\mathbf{C}[X]$. Pour en déduire la factorisation sur $\mathbf{R}[X]$, on peut utiliser $(X - z_0)(X - \overline{z_0}) = X^2 - 2\Re(z_0)X + |z_0|^2$, pour tout $z_0 \in \mathbf{C}$.

4. On cherche à factoriser une expression du type $Y^2 + 1$ ici.
5. Pour $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, la factorisation de $a^2 + b^2$ est donnée dans le cours sur les complexes (on retrouve facilement ce résultat en notant que $a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2$).
6. On peut factoriser par $X - 1$ pour commencer...
7. On a, pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a + b)(\dots)$.
8. On résout $z^6 = -1$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ pour commencer.
9. On résout $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ pour commencer (attention aux divisions par zéro!). Pour voir que les $n - 1$ racines obtenues sont simples, on pourra s'intéresser au degré de P_9 .
10. $P_{10} = (X - 1)(X - 2) \left(X + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \right) \left(X + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \right)$.
11. $P_{11} = (X + 1)(X - 1)(X - i)(X + i) = (X + 1)(X - 1)(X^2 + 1)$.
12. $P_{12} = (X + 1)(X - e^{i\pi/5})(X - e^{-i\pi/5})(X - e^{3i\pi/5})(X - e^{-3i\pi/5})$. et $P_{12} = (X + 1) (X^2 - 2 \cos(\frac{\pi}{5}) + 1) (X^2 - 2 \cos(\frac{3\pi}{5}) + 1)$.
13. $P_{13} = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{4i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X - e^{-4i\pi/3})$. et $P_{13} = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

Exercice 17.31. Décomposer dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 8(1 - i)X - 12$ sachant qu'il admet une racine multiple.

Indication 17.31. La racine multiple est $1 + i$ (comment la trouver?). Une fois celle-ci obtenue, le reste est rapide :

$$x_1 = -(\sqrt{2} + 1) + i(\sqrt{2} - 1) \quad \text{et} \quad x_2 = (\sqrt{2} - 1) - i(1 + \sqrt{2}).$$

On a : $P = (X - (1 + i))^2(X - x_1)(X - x_2)$.

Exercice 17.32. Soit n un entier naturel non nul. Posons

$$P_n = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iX}{n} \right)^n - \left(1 - \frac{iX}{n} \right)^n \right).$$

1. Démontrer que $P_n \in \mathbf{R}[X]$.
2. Factoriser P_n dans $\mathbf{R}[X]$ pour $n = 5$ et $n = 6$.

Indication 17.32. 1. On pourra exprimer P_n en fonction de $U = \left(1 + \frac{iX}{n} \right)^n$.

2. On pourra commencer par résoudre $\left(\frac{n + iz}{n} \right)^n = \left(\frac{n - iz}{n} \right)^n$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ (en veillant bien de ne pas diviser par zéro). Une fois les racines (réelles) trouvées, on pourra déterminer le degré de P_5 et de P_6 pour conclure.

Exercice 17.33. Introduisons la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par la donnée des polynômes

$$P_0 = X \quad \text{et} \quad P_1 = 3X - 4X^3,$$

et par la relation de récurrence

$$P_{n+2} = 2(1 - 2X^2)P_{n+1} - P_n.$$

1. Déterminer, pour tout entier naturel n , le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .
2. Montrer que le polynôme X divise P_n pour tout entier naturel n .
3. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.
4. Prouver que pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel θ ,

$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n + 1)\theta).$$

5. Soit $n \in \mathbf{N}$.

(a) Pourquoi peut-on affirmer que le polynôme P_n est le seul polynôme vérifiant pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,

$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n + 1)\theta)?$$

(b) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $P_n(\sin(\theta)) = 0$ d'inconnue θ réelle.

(c) En déduire les racines de P_n dans $[-1; 1]$ et factoriser P_n sur $\mathbf{R}$.

Indication 17.33. 1. On pourra conjecturer le résultat puis le démontrer.

2. On pourra utiliser la caractérisation « $X \mid P_n$ si et seulement si le terme constant de P_n est ... ». Il restera à démontrer ce résultat.
3. Factorisation classique d'expression trigonométrique (voir cours sur les complexes).
4. Récurrence double. Pour l'hérédité, on pourra par exemple exprimer, pour $(n, \theta) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$, $\sin((2n+5)\theta)$ et $2(1-2\sin(\theta)^2)\sin((2n+3)\theta) - \sin((2n+1)\theta)$ en fonction de $\sin((2n+1)\theta)$, $\cos((2n+1)\theta)$, $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$.
5. (a) P est déterminé sur $[-1; 1]$, qui est ...
 (b) Classique.
 (c) Il faut utiliser la question (b) pour déterminer les $2n+1$ racines distinctes de P_n (justifier que P_n en possède au plus $2n+1$). On en déduit ensuite la factorisation demandée (ne pas oublier le coefficient dominant).

Décomposition en éléments simples

Exercice 17.34. Décomposer en éléments simples la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 24x - 17}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

Indication 17.34. La méthode est dans le cours.

Exercice 17.35. Décomposer en éléments simples la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x^5 + x + 4}{x^4 - 1}.$$

En déduire une primitive de g sur $] -1; 1[$.

Indication 17.35. La méthode est dans le cours.