TD 16 — Calcul matriciel

Vocabulaire général

Exercice 16.1. Expliciter $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ dans les cas suivants.

1. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = \max(i,j)\,;$
2. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = \left\lfloor \dfrac{i+j}{4} \right\rfloor;$
3. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = |i-j|\,;$
4. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i < j \end{cases}.$

Indication 16.1. Rien de particulier, vous pouvez chercher les coefficients de la matrice les uns après les autres si vous ne voyez pas tout de suite à quoi la matrice totale peut ressembler.

Exercice 16.2. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque cela a un sens :

$$3A \quad ; \quad A+B \quad ; \quad B+2C \quad ; \quad AB \quad ; \quad BA \quad ; \quad BC \quad ; \quad BAC.$$

Indication 16.2. Rien à signaler, la méthode est dans le cours.

Exercice 16.3. Déterminer toutes les matrices A qui vérifient :

$$A \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 5I_2 = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 21 & 10 \end{pmatrix}.$$

Indication 16.3. A est l'inconnue, on l'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: le problème revient alors à déterminer a, b, c et d. Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients. Comme les matrices possèdent ici 4 coefficients, on obtient 4 équations, vérifiées par les 4 inconnues a, b, c et d.

Exercice 16.4. Démontrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Indication 16.4. On chercher à montrer qu'un problème admet une unique solution, une analyse/synthèse est donc adaptée.

Exercice 16.5. Soit $(n,p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ telle que $A^\top A = 0$. Montrer que $A = 0$. Ce résultat est-il encore valide pour une matrice à coefficients complexes ?

Indication 16.5.
1. Il faut calculer les coefficients de $A^\top A$ (avec la formule du cours). Vous devez trouver une somme de carrés.

2. Même calcul, sauf qu'une somme de carrés nul dans $\mathbf{C}$ n'entraîne pas toujours que les termes de la somme sont tous nul. Vous pouvez chercher deux complexes a et b non nuls tels que $a^2 + b^2 = 0$ pour trouver un contre-exemple.

Exercice 16.6 . Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les matrices $S = (s_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ définies par

$$\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2, \quad p_{i,j} = ij \quad \text{et} \quad s_{i,j} = \begin{cases} i+j & \text{si } i \geqslant j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le produit SP pour $n = 4$.

2. Calculer les coefficients de la matrice SP dans le cas général.

Indication 16.6. **1.** Déterminer S puis P, le produit à faire est ensuite simple.

2. Il faut utiliser la formule qui donne un coefficient d'un produit : il y a une somme à simplifier (il y a plusieurs termes nuls puisque $s_{i,j} = 0$ si $i < j$). Vous pouvez vérifier que la formule que vous obtenez à la fin est cohérente avec le résultat de la question **1.**.

Exercice 16.7 (*Trace d'une matrice*). Soit un entier $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Indication 16.7 . Il faut appliquer la formule de la trace, ainsi que les formules qui donne un coefficient d'une somme/d'un produit de matrices.

Calcul de puissances

Exercice 16.8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

2. Prouver que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies sont linéaires récurrentes d'ordre 2 et déterminer l'expression de leur terme général.

3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Indication 16.8. **1.** Récurrence. Attention à bien écrire l'assertion !

2. Vous avez du trouver une relation de récurrence dans la question précédente. La méthode pour trouver le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 doit être connue !

3. Il faut conclure avec les deux questions précédentes.

Exercice 16.9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}$, A^k et B^k.

2. Calculer $(A+B)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Indication 16.9. **1.** A est diagonale... Pour B, vous pouvez calculer B^2, B^3 et en déduire B^k pour tout $k \geqslant 3$.

2. Une formule du cours permet de développer ce type de somme (cette formule a une hypothèse, n'oubliez pas de la vérifier !).

Exercice 16.10. **1.** Pour la matrice A suivante, calculer A^n, pour tout entier naturel n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Posons $B = A + I_3$. Calculer B^n pour tout entier naturel n.

Indication 16.10. **1.** Donner A^0, A^1, A^2, A^3 et en déduire A^n pour tout $n \geqslant 3$.

2. N'oubliez pas les hypothèses une fois que vous aurez repérer la formule du cours utile !

. . . .

Exercice 16.11. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

Indication 16.11. Méthode libre ! Le plus simple est peut être de calculer les premières puissances de A, de conjecturer une formule et de la démontrer par récurrence.

. . . .

Exercice 16.12. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer A^n lorsque

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **3.** $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

où a b et c sont trois nombres réels (on pourra commencer par le cas où $a = b$).

Indication 16.12. Vous pouvez conjecturer des formules puis les démontrer par récurrence. Attention, les formules à obtenir sont différentes si $a = b$ et si $a \neq b$ pour la dernière question.

. . . .

Exercice 16.13. **1.** On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 + a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1 + a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

2. Soit u, v, w les suites définies par la donnée de $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n, \quad w_{n+1} = u_n + v_n + w_n.$$

Déterminer, à l'aide de la matrice A, l'expression des termes généraux de ces trois suites.

Indication 16.13. **1. (a)** Récurrence.

(b) Dans le raisonnement par récurrence de la question précédente, on a obtenu que (a_n) est une suite arithmético-géométrique.

2. On peut poser pour tout $n \in \mathbf{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Cette relation de récurrence fait immédiatement penser aux suites géométriques, et nous avons effectivement, de manière formelle,

$$U_n = AU_{n-1} = A^2U_{n-2} = \cdots = A^nU_0.$$

Il faut démontrer cette dernière relation (récurrence), et conclure avec la question 1.

Inversibilité

. . . .

Exercice 16.14. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} (sans utiliser le pivot de Gauss).

Indication 16.14. **1.** On peut développer à l'aide de la formule du binôme de Newton matricielle.

2. On a un polynôme annulateur de A, donc peut faire une factorisation pour obtenir $AB = I_3$: B est par définition l'inverse de A.

Exercice 16.15. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^3 = 0$.

1. La matrice A est-elle inversible ? *Indication :* vous pourrez raisonner par l'absurde.

2. On pose $B = I + A$. En exploitant la relation $A^3 = 0$, montrer que B^3 est combinaison linéaire des matrices B^2, B et I. En déduire que B est inversible.

Indication 16.15. **1.** La matrice A n'est pas inversible. Pour le montrer, on pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe une matrice B tel que $AB = I_n$ et obtenir une contradiction (on peut par exemple, après calculs, montrer que cette hypothèse absurde conduit à $0 = I_n$).

2. On a $(B - I_n)^3 = A^3 = 0$, donc en développant $(B - I_n)^3$ (avec le binôme de Newton matriciel) on peut conclure. On obtient ainsi un polynôme annulateur de B, ce qui permet d'obtenir une factorisation du type $BC = I_n$, ce qui prouve que B est inversible (d'inverse C).

Exercice 16.16. Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $R(\alpha)R(\beta)$.

2. Démontrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et calculer son inverse.

3. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer $R(\theta)^n$ (si n est un entier négatif, on convient que $R(\theta)^n = (R(\theta)^{-1})^{-n}$).

Indication 16.16. **1.** Vous devez trouver un résultat sous la forme $R(\cdots)$ (les formules de trigonométrie sont bien entendu utiles !).

2. Vous pouvez utiliser la question précédente !

3. La formule obtenue à la question **1.** vous pouvez de conjecturer une expression pour $R(\theta)^n$. Il reste à la démontrer par récurrence (la formule de **1.** est encore utile).

Exercice 16.17. **1.** Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^2 - (a + d)A$.

(b) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les scalaires a, b, c, d la matrice A est-elle inversible ? Lorsque A est inversible, exprimer A^{-1} à l'aide de a, b, c, d.

2. Supposons $ad - bc \neq 0$. Soit $(e, f) \in \mathbf{K}^2$. Résoudre le système $\begin{cases} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Indication 16.17. **1.** **(a)** Vous devez trouver une matrice scalaire.

(b) Vous avez un polynôme annulateur de matrices, donc la méthode pour en déduire si la matrice est inversible est standard...

2. Il faut utiliser la question précédente.

Exercice 16.18. Soit $a, b, c \in \mathbf{C}$. Inverser, si possible, les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **2.** $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **3.** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **5.** $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **6.** $F = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **8.** $I = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$. **9.** $J = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$.

Indication 16.18. Il faut appliquer la méthode avec le pivot de Gauss étudiée dans le cours ou celle qui consiste à résoudre un système linéaire, vous avez le choix !
La dernière matrice est plus difficile. Vous pouvez vous aider d'un exercice précédent dans lequel on a résolu un système 2×2 général.

. . . .

Exercice 16.19. **1.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On pose $D = P^{-1}MP$. Démontrer que pour tout $k \geqslant 0$, on a $M^k = PD^kP^{-1}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.

(b) Calculer M^k pour tout $k \geqslant 0$.

Indication 16.19. **1.** On veut démontrer une assertion portant sur des entiers naturels, un type de raisonnement est adapté...

2. **(a)** On a plusieurs méthodes dans le cours pour obtenir P^{-1}. La matrice $P^{-1}MP$ s'appelle D, ce qui sous-entend qu'elle est diagonale.

(b) Il faut utiliser la question **1.**.

. . . .

Exercice 16.20. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible.

2. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire une expression de A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Indication 16.20. **1.** On a besoin de l'inverse pour la question suivante : on applique donc la méthode de calcul de l'inverse basée sur le pivot de Gauss. On obtient trois pivots, pour une matrice carrée de format $(3,3)$, donc la matrice est inversible.

2. $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient $A = PDP^{-1}$, puis

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}D\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}\dots D\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}DP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

(cette formule est à montrer soigneusement par récurrence). On peut ensuite calculer cette matrice car D étant diagonale, on obtient facilement D^n.

Systèmes linéaires

. . . .

Exercice 16.21. Donner la matrice associée au système suivant, puis appliquer la méthode de Gauss sur ces matrices pour résoudre les systèmes.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+y-2z &=& 0 \\ x+3y-z &=& 0 \\ -x+4y-3z &=& 0 \end{array}\right.$; **2.** $\left\{\begin{array}{rcl} -3x+2y-2z &=& 0 \\ x+3y-z+2t &=& 0 \\ 2x+2z+2t &=& 0 \end{array}\right.$; **3.** $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 0 \\ x+3y-z &=& 0 \\ 2x+2z &=& 0 \\ x-y+z &=& 0 \end{array}\right.$.

Indication 16.21. Rien de particulier, la méthode est dans le cours.

. . . .

Exercice 16.22. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On admet que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ et on donne $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Soit a, b, c des réels réels. Sans utiliser la méthode de Gauss, montrer que le système

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & a \\ -3x + y + 2z & = & b \\ 2x - y - z & = & c \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ possède une unique solution et l'exprimer en fonction de a, b, c.

Indication 16.22. Un simple produit de matrices suffit !

Ensembles de matrices

. . . .

Exercice 16.23. On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} -(a+b) & b & a \\ a & -(a+b) & b \\ b & a & -(a+b) \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer qu'il existe deux matrices A et B telles que

$$E = \left\{ \lambda A + \mu B \,:\, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

2. Prouver que A^2, AB, BA et B^2 appartiennent à E. En déduire que E est stable par multiplication, c'est-à-dire que pour tous $M, N \in E$, $MN \in E$.
3. Existe-t-il dans E des matrices dont l'inverse appartient encore à E ?

Indication 16.23. 1. La question revient à chercher A et B telles que

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K}) \mid \exists (a,b) \in \mathbf{K}^2,\ M = aA + bB \right\}.$$

2. Il faut simplement trouver α, β tels que $A^2 = \alpha A + \beta B$, et faire de même avec AB, BA, B^2.
Soit $(M, N) \in E^2$. D'après la question 1, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tel que $M = aA + bB$ et $N = cA + dB$. Il reste à voir que $MN \in E$.
3. Raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente pour en déduire que $I_3 \in E$. Montrer ensuite que $I_3 \notin E$ (c'est l'absurdité).

. . . .

Exercice 16.24. On note J la matrice carrée d'ordre $n \in \mathbf{N}^\star$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Pour tout entier naturel non nul p, calculer J^p.
2. Soit $\mathcal{E} = \{I_n + \alpha J \,:\, \alpha \in \mathbf{R}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, $AB \in \mathcal{E}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la matrice $I_n + \alpha J$ admet-elle un inverse dans $\mathcal{E}$?
   (b) En déduire l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (c) A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout entier naturel n.

Indication 16.24. 1. Conjecturer une formule et la démontrer par récurrence.

2. (a) Il faut utiliser la question précédente. Pour l'inverse de J, il faut commencer ainsi : « $I + \alpha J$ admet un inverse dans $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe β tel que $(I + \alpha J)(I + \beta J) = I_4$ ».

(b) Vous pouvez remarquer que $A = 4\left(I_4 + \frac{1}{4}J\right)$ et utiliser la formule établie à la question précédente qui donner l'inverse de $I_4 + \frac{1}{4}J$.

(c) Seule la question **1.** est utile. Attention, la formule pour cette question n'est pas valable pour $k = 0$, il faudra donc « couper » la somme !

. . . .

Exercice 16.25 (*Ensemble des commutants*). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on appelle **commutant** de A et on note $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent avec A :

$$\mathscr{C}(A) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid AM = MA \}.$$

1. Propriétés générales. Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que $I_n \in \mathscr{C}(A)$.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $A^p \in \mathscr{C}(A)$.

(c) Soit $M, N \in \mathscr{C}(A)$ et λ un réel. Montrer que les matrices λM, $M + N$ et MN appartiennent au commutant de A.

(d) Soit $M \in \mathscr{C}(A)$. Montrer que si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathscr{C}(A)$.

2. Un exemple. Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Le but de cette question est de montrer que

$$\mathscr{C}(A) = \{\lambda I_2 + \mu A \,:\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble $\mathscr{E} = \{\lambda I_2 + \mu A \,:\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$.

(a) A t-on $A^\top \in \mathscr{E}$?

(b) À l'aide des résultats de la question **1.** et sans faire aucun calcul de produit matriciel, justifier que $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}(A)$.

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer les produit AM et MA. En déduire que $M \in \mathscr{C}(A)$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & -4b \\ d & = & a + 4b \end{array} \right.$.

(d) Montrer que $\mathscr{C}(A) \subset \mathscr{E}$ et conclure.

Indication 16.25. **1. (a)** La question revient à vérifier que $AM = MA$ pour $M = I_n$.

(b) La question revient à vérifier que $AM = MA$ pour $M = A^p$.

(c) Puisque $M \in \mathscr{C}(A)$ et $N \in \mathscr{C}(A)$, vous savez que $AM = MA$ et $AN = NA$. Pour montrer que $M+N \in \mathscr{C}(A)$, il faut montrer que $A(M + N) = (M + N)A$ en utilisant les deux propriétés connues.

(d) Il faut, à partir de l'égalité $AM = MA$, obtenir l'égalité $AM^{-1} = M^{-1}A$ (vous avez le droit de multiplier à gauche et à droite par une matrice bien pensée ☺).

2. (a) La réponse est non, il faut raisonner par l'absurde pour l'obtenir (la méthode ressemble à celle pour obtenir un polynôme annulateur d'une matrice $(2, 2)$: vous supposez par l'absurde que $A^\top = \lambda I_2 + \mu A$, vous déterminez μ avec un coefficient qui n'est pas sur la diagonale de $A^\top$ et vous concluez que $A^\top - \mu A$ n'est pas diagonale donc qu'il ne peut exister λ tel que $A^\top - \mu A = \lambda I_2$).

(b) Il faut utiliser **1.(a)**, **1.(b)** puis **1.(c)** pour expliquer cette inclusion (qui revient à dire que pour tous λ, μ réels, $\lambda I_2 + \mu A \in \mathscr{C}(A)$.

(c) Rien de particulier : deux matrices sont égales si tous leurs coefficients sont égaux.

(d) Avec la question précédente, vous avez du obtenir que si $M \in \mathscr{C}(A)$, alors il existe α et β tels que $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -4\beta & \alpha + 4\beta \end{pmatrix}$. Il faut déterminer λ et μ réels tels que $M = \lambda I_2 + \mu A$ pour conclure.