TD 15 Suites réelles et complexes

Généralités sur les suites

Exercice 15.1. Dans chacun des cas suivants, décider si la suite de terme général u_n est monotone à partir d'un certain rang.

1. $u_n = 2^n - n$; **2.** $u_n = \dfrac{n}{2^n}$; **3.** $u_n = \dfrac{n+1}{n-4}$; **4.** $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$;

5. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$; **6.** $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$; **7.** $u_n = 2n + \dfrac{1}{5^n}$; **8.** $u_n = \dfrac{3^n}{n+1}$;

9. $u_n = 3^n - n + 1$; **10.** $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$; **11.** $u_n = 2n^2 + 3n - 8$; **12.** $u_n = \dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$.

Indication 15.1. Il faut utiliser un deux des critères du cours (déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou bien, dans le cas où $u_n = f(n)$, déterminer les variations de f).

Exercice 15.2. Dans chacun des cas suivants, dire si la suite de terme général u_n est bornée ou non.

1. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$; **2.** $u_n = \dfrac{3n-2}{3n+2}$; **3.** $u_n = (-1)^n$; **4.** $u_n = n(-1)^n$.

Indication 15.2. Il faut déjà conjecturer la valeur M de la borne, ensuite on utilise la définition pour démontrer la conjecture faite ($\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leqslant M$).

Exercice 15.3. Représenter graphiquement chacune des suites définies par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1$; **2.** $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

Indication 15.3. Voir dans le cours (si $u_{n+1} = f(u_n)$, le graphe de f est utile, ainsi que la première bissectrice).

Exercice 15.4. On considère la suite u définie par

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}}.$$

Calculer les premiers termes de cette suite, et faire une conjecture sur l'expression du terme général de cette suite en fonction de n. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Indication 15.4. Rien de particulier, il y a déjà des indications dans l'énoncé.

Calculs « directs » de limites

Exercice 15.5. Montrer, en revenant à la définition, que la suite u de terme général $u_n = \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ converge vers 0, que la suite v de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ converge vers 1 et que la suite w de terme général $w_n = 2^n - 3\cos(n)$ diverge vers $+\infty$.

Indication 15.5. Il faut revenir aux définitions. Par exemple, pour montrer que u converge vers 1, il faut montrer l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - 1| < \varepsilon.$$

Il faut donc utiliser le schéma de preuve suivant :

> *Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N_\varepsilon = ...$ Soit $n \geqslant N_\varepsilon$.*
> *[...]*
> *Donc $|u_n - 1| < \varepsilon$. On vient de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.*

Pour déterminer N_ε, vous pouvez faire une analyse préalable au brouillon.

. . . .

Exercice 15.6. Soit $a, b \in \mathbf{R}_+^\star$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si elle existe la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+2}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 5n}{3n^2 + 4n^3}$;
3. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;
4. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$;
5. $u_n = \dfrac{2^n}{n^6 + n^3 + 1}$;
6. $u_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n}}{4 + \mathrm{e}^n}$;
7. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{2n} + 3}{(\mathrm{e}^n + 5)^2}$;
8. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{4 \cdot 2^n - 3^{n+1}}$;
9. $u_n = \dfrac{10^{n+3}}{n + 3^{2n+1}}$;
10. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^2+1\right)}{n+1}$;
11. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;
12. $u_n = \left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-n^2}$;
13. $u_n = 3^{1/n}$;
14. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$;
15. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$;
16. $u_n = 3\sqrt{n^2+1} - 5n$;
17. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$;
18. $u_n = \dfrac{n - n\ln n}{n + \ln n}$;
19. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$;
20. $u_n = n^{1/\ln(n)}$.

Indication 15.6. Certaines limites ne sont pas indéterminées, la réponse est immédiate. Pour lever une FI dans un produit ou un quotient, on rappelle qu'on peut factoriser par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur puis simplifier ou appliquer le théorème des croissances comparées. Pour une différence de racines carrées, l'utilisation de la forme conjuguée pourra être utile.

. . . .

Exercice 15.7.

1. Déterminer la limite de la suite u de terme général $u_n = (1 + 2^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. On veut généraliser la question précédente. Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$. On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \max(a, b)$.

Indication 15.7.

1. On pourra factoriser par 2^n l'expression dans la parenthèse, et utiliser la notation exponentielle.

2. On distinguera les cas $a = b$, $a > b$ et $a < b$, puis on appliquera une méthode similaire à celle de la question **1.**.

. . . .

Exercice 15.8. Déterminer si les suites dont les termes généraux sont donnés ci-après convergent, et préciser le cas échéant leur limite.

1. $u_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$;
2. $u_n = \dfrac{1 + 3 + \cdots + 3^n}{3^n}$;
3. $u_n = 1 + 2^{-1} + \cdots + 2^{-n}$.

Indication 15.8 . Il faut reconnaître des sommes usuelles et les simplifier. Le cas de limite ensuite n'est pas très compliqué.

. . . .

Exercice 15.9 . Soit u une suite d'entiers. On suppose que u converge. Montrer que u est constante à partir d'un certain rang.

Indication 15.9 . Vous pouvez chercher à montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $n, m \geqslant N$, $|u_n - u_m| < 1$.

. . . .

Exercice 15.10 . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n, v_n, u_1 et v_1.
2. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers x et y. Déterminer alors leurs limites x et y.
3. En déduire qu'elles sont toutes deux divergentes.

Indication 15.10 . **1.** Il faut utiliser des formules de trigonométrie.

2. Vous pouvez « passer à la limite » dans les égalités précédente. Cela fournit un système d'équations qu'il reste à résoudre.
3. Que vaut, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 + v_n^2$? Cela contredit les limites obtenues à la question précédente, donc que pouvez-vous en déduire ?
   Il reste à supposer par l'absurde qu'une suite converge. Avec la question **1.**, vous pouvez obtenir la nature de l'autre suite.

. . . .

Exercice 15.11 (*Suite de Césaro*). Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone et de même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers 0 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.
4. Donner un exemple où la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge mais où la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ diverge.

Indication 15.11 . **1.** Si un nombre est plus grand (resp. plus petit) que des nombres, il est est plus grand (resp. petit) que leur moyenne.

2. Il faut revenir à la définition, utiliser une célèbre inégalité.
3. Il faut se ramener à la question précédente en considérant $(w_n) = (u_n - \ell)$.
4. Vous pouvez choisir $(u_n) = ((-1)^n)$.

Théorèmes d'existence d'une limite

. . . .

Exercice 15.12 . Dans chacun des cas suivants, déterminer si elle existe la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = n + (-1)^n \sqrt{n}$;
2. $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+p)^2}$;
3. $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$;
4. $u_n = \dfrac{1}{n}\lfloor\sqrt{n}\rfloor$;
5. $u_n = \dfrac{\cos(n^3)}{n^2}$;
6. $u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
7. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$;
8. $u_n = \dfrac{2+3\cos(n)}{n+1}$;
9. $u_n = n + 2\sin(n^2)$;
10. $u_n = (\ln n)^{1/n}$;
11. $u_n = 2n + (-1)^n n$;
12. $u_n = \dfrac{1}{n}\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$.

Indication 15.12 . Théorème d'encadrement, de minoration ou de majoration pour chaque limite.

1. Rien à signaler.

2. Il faut pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $p \in [\![1, n]\!]$, encadrer $\dfrac{1}{(n+p)^2}$ et sommer les encadrements obtenus.

3. Vous pouvez remarquer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k!$.

4. Il y a un encadrement caractéristique de la partie entière dans un chapitre précédent.

5. Quelles sont les bornes de cosinus ?

6. Vous pouvez, pour $n \in \mathbf{N}^\star$, majorer $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$ par une constante avant de conclure.

7. Il faut factoriser par les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur avant de chercher à appliquer le théorème d'encadrement.

8. Rien à signaler.

9. Rien à signaler.

10. Vous pouvez utiliser une inégalité sur la fonction ln apprise dans un chapitre précédent.

11. Rien à signaler.

12. Rien de nouveau.

. . . .

Exercice 15.13. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. En déduire un encadrement du terme $\ln(u_n)$, où $n \in \mathbf{N}^\star$.

3. Montrer que la suite de terme général $\ln(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

4. Conclure.

Indication 15.13. **1.** Il faut démontrer une inégalité pour tout x.. Il faut toujours penser dans ce cas à une étude de fonction (pas forcément le plus simple, mais c'est à essayer si on n'a pas d'idée meilleure).

2. On peut transformer $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)\right)$. Il faut ensuite appliquer le résultat de la question précédente.

3. On a un encadrement, on demande une convergence, donc on utilise le théorème...

4. On peut composer ici.

. . . .

Exercice 15.14. Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant \alpha.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Indication 15.14. Vous pouvez montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant u_0 + n\alpha$.

. . . .

Exercice 15.15. Soient u et v deux suites de nombres réels appartenant à $[0\,;\,1]$ telles que la suite uv converge vers 1. Montrer que les suites u et v convergent également vers 1. On pourra chercher à utiliser le théorème des gendarmes après avoir encadré la suite u.

Indication 15.15. Si on veut appliquer le théorème d'encadrement pour démontrer que v converge vers 1, il faut encadrer v par deux suites qui convergent vers 1 (une suite peut être constante égale à 1...). Notons que l'hypothèse $u \in [0\,;\,1]^{\mathbf{N}}$ signifie que $0 \leqslant u \leqslant 1$.

. . . .

Exercice 15.16 (*Caractérisation séquentielle de la borne supérieure*). **1.** Soit A une partie bornée de $\mathbf{R}$, soit M un réel. Montrer que M est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant et s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M.

2. On considère $A = \left\{ \dfrac{2p}{2pq+3} \ : \ (p,q) \in (\mathbf{N}^\star)^2 \right\}$. Déterminer la borne supérieure de A.

Indication 15.16. **1.** D'après la caractérisation de la borne supérieure, il faut montrer que

$$[\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A, \ M - x < \varepsilon] \iff \left[\exists (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \ \lim_{n\to+\infty} u_n = M \right].$$

2. Vous pouvez utiliser la question précédente pour montrer que $\sup(A) = 1$ (il faut donc montrer que 1 est un majorant et trouver une suite d'éléments de A qui converge vers 1).

. . . .

Exercice 15.17. La suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ admet-elle une limite ?

Indication 15.17. Vous pouvez chercher deux suites extraites qui n'ont pas la même limite.

. . . .

Exercice 15.18. Soit u une suite réelle.

1. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. La suite u converge t-elle ?
2. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite. La suite u converge t-elle ?
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. La suite u converge t-elle ?

Indication 15.18. **1.** Faux, il faut chercher un contre-exemple (si vous connaissez bien votre cours, vous savez qu'il faut chercher deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite).

2. Vrai, c'est dans le cours. Vous pouvez le démontrer pour vous entraîner.

3. Vrai. Si on note ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les limites des trois suites, vous pouvez montrer que $\ell_1 = \ell_2$ en considérant des suites extraites bien choisies. Idem pour $\ell_2 = \ell_3$. Il ne reste plus qu'à conclure !

. . . .

Exercice 15.19. **1.** Justifier que si une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, alors la suite $(x_{2n} - x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

2. On introduit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est divergente.

Indication 15.19. **1.** Si (x_n) converge vers un réel ℓ, quelle est la limite de (x_{2n}) ?

2. Il faut calculer $S_{2n} - S_n$ puis utiliser la question **1.**.

. . . .

Exercice 15.20. Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ dont les termes généraux sont définis pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont adjacentes.

Indication 15.20. Il faut vérifier les trois points de la définition ! (quand vous calculer $S_{n+1} - S_n$, les sommes se simplifient, idem pour $T_{n+1} - T_n$).

. . . .

Exercice 15.21. **1.** Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définies pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.

2. Montrer la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est irrationnelle.

Indication 15.21. **1.** Il faut vérifier les trois points de la définition.

2. En utilisant la question **1.**, on obtient que u et v convergent vers une même limite ℓ et de plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < \ell < v_n$ (les inégalités sont stricte car les suites u et v sont strictement monotones). C'est à partir de cet encadrement que vous pouvez obtenir que ℓ est irrationnel.

. . . .

Exercice 15.22. Montrer que la suite s de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

converge. On pourra montrer que les suites extraites $(s_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

Indication 15.22. Il faut vérifier les points de la définition pour montrer que les suites sont adjacentes. Il reste ensuite deux théorèmes à appliquer pour conclure.

. . . .

Exercice 15.23. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrons de deux manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

1. **Méthode 1 : avec des inégalités**.
   - **(a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est strictement croissante.
   - **(b)** Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire une majoration de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.
   - **(c)** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est convergente et donner un encadrement simple de sa limite.
2. **Méthode 2 : avec des suites adjacentes**. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Indication 15.23. **1.** **(a)** Rien à signaler.
   - **(b)** L'inégalité est simple à obtenir (vous pouvez vous ramener à une étude de signe par exemple, ou être un peu plus astucieux aussi). Ensuite, il faut sommer ces inégalités (attention, l'inégalité n'est vraie que si k est plus grand que 2 !).
   - **(c)** Immédiat avec les deux précédents questions.

2. Rien à signaler. Une partie des calculs a déjà été faite avant.

. . . .

Exercice 15.24. **1.** On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.
   - **(a)** Déterminer le sens de variation de u.
   - **(b)** En déduire que u admet une limite. Montrer par l'absurde que u diverge vers $+\infty$.

2. On considère la suite u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
   - **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$ et en déduire le sens de variation de u.
   - **(b)** Justifier que u admet une limite et déterminer celle-ci.

3. On considère la suite u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$. Déterminer que la suite u converge et préciser sa limite.

Indication 15.24. **1.** **(a)** Immédiat.
   - **(b)** Un théorème du cours donne directement la réponse et il précise que la limite est finie ou égale à $+\infty$. Pour démontrer que la suite diverge vers $+\infty$, il faut raisonner par l'absurde et supposer que la suite converge vers un réel ℓ. En passant la limite dans la relation

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$$

on obtient une absurdité.

2. **(a)** Standard.
   - **(b)** Même méthode que pour la question précédente.

3. Toujours le même théorème, mais moins guidé et ici la suite converge. Vous pouvez montrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ pour commencer.

Exercice 15.25. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres réels vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$2u_{n+1} \leqslant u_{n+2} + u_n.$$

On introduit la suite v de terme général

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite v converge vers 0.

1. Traduire le fait que la suite u est bornée.
2. Montrer que la suite v est majorée et croissante. Elle converge donc vers un nombre réel, que nous noterons ℓ.
3. Dans cette question, on suppose $\ell > 0$.
   (a) Montrer que $v_n \geqslant 0$ au delà d'un certain rang.
   (b) En déduire que la suite u est croissante au delà d'un certain rang.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite u ?
   (d) Montrer que l'on aboutit à une contradiction.
4. Dans cette question, on suppose $\ell < 0$. En suivant le même raisonnement que précédemment, montrer qu'il y a contradiction.
5. Conclure.

Indication 15.25. 1. Il faut donner la définition de suite bornée ici !

2. Pour montrer que v est majorée (même bornée ici), on pourra majorer $|v_n| = |u_{n+1} - u_n|$ en utilisant l'inégalité triangulaire.
   Pour montrer que v est croissante, vous pouvez chercher le signe de $v_{n+1} - v_n$.
3. (a) Il faut appliquer la définition de la convergence vers ℓ, qui assure que pour tout intervalle I contenant ℓ, tous les termes de la suite appartiennent à I à partir d'un certain rang. Il vous faut choisir un intervalle I qui permet de répondre à la question.
   (b) Il faut utiliser la définition de v_n.
   (c) u est croissante et majorée, donc...
   (d) Vous pouvez noter ℓ' la limite de u et passer à la limite dans la relation $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour obtenir une contradiction.
4. Il faut reprendre toutes les étapes de la question précédente, c'est très similaire ici.
5. On a supposé $\ell < 0$ et abouti à une contradiction. Idem en supposant $\ell > 0$. Le seul cas possible est alors $\ell = ...$?

Suites implicites

Exercice 15.26. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle à préciser. On notera $\widetilde{f}$ l'application bijective ainsi obtenue.
3. Établir le tableau de variations de la fonction réciproque $\widetilde{f}^{-1}$ de $\widetilde{f}$.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $\widetilde{f}(x) = n$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
5. Étudier les variations et la limite de (u_n).

Indication 15.26. 1. Rien à signaler.

2. Il faut utiliser un célèbre théorème ☺
3. Il n'y a pas de calcul supplémentaire à faire ici.
4. Il faut vérifier que $n \in f(\mathbf{R}_+)$ avant de conclure !
5. Immédiat avec les questions précédentes.

Exercice 15.27. Introduisons $f : x \longmapsto e^x + x$ définie sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution réelle. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est monotone.
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, puis déterminer celle-ci.

Indication 15.27. 1. Il faut utiliser un célèbre théorème.

2. On connaît les variations de f^{-1}.
3. On connaît la limite de f^{-1} en $+\infty$.

....

Exercice 15.28. On considère l'équation $(E_n) : x^n - x - 1 = 0$, où $n \geqslant 2$. On introduit, pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto x^n - x - 1$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$; on note x_n cette solution.
2. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Donner le signe de la fonction $x \longmapsto f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[1\,;+\infty[$.
   (b) Rappeler la valeur de $f_n(x_n)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
   (c) Rappeler la valeur de $f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire le sens de variation de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
4. En remarquant que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = (1 + x_n)^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\ell = 1$.

Indication 15.28. 1. Il faut utiliser un célèbre théorème.

2. (a) Il faut simplifier, pour $x \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Pour trouver un signe, il vaut il mieux factoriser ou développer ?
   (b) Relire la définition de (x_n) pour trouver $f_n(x_n)$. Il faut utiliser ce résultat et la question précédente pour conclure.
   (c) Relire la définition de (x_n) pour trouver $f_{n+1}(x_{n+1})$. Il faut utiliser ce résultat et la question précédente pour conclure.
3. Vous connaissez le sens de variation de la suite, donc un célèbre théorème permet de conclure que la suite admet une limite (on peut même justifier que cette limite est finie, comme demandé, avec ce même théorème !).
4. La relation proposée se réécrit $\frac{1}{n}\ln(1 + x_n) = \ln(x_n)$. Vous pouvez noter ℓ la limite de (x_n) et passer à la limite dans l'égalité précédente pour conclure.

....

Exercice 15.29. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\varphi_n(x) = x - \ln(x) - n$.

1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$ fixé. Montrer que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
2. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées x_n et y_n telles que $x_n \in]0\,;1[$ et $y_n \in]1\,;+\infty[$.
3. En utilisant la question **1.** et le sens de variation de φ_{n+1}, comparer $\varphi_{n+1}(x_n)$ et $\varphi_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

Indication 15.29. 1. Rien de particulier.

2. Il faut utiliser un célèbre théorème.
3. Que vaut $\varphi_n(x_n)$? Et $\varphi_{n+1}(x_{n+1})$? Les deux sont utiles, dans cet ordre !
4. Les questions précédentes et un célèbre permettent d'obtenir que la suite converge. Vous pouvez montrer, en raisonnant par l'absurde, que cette limite est nulle (il faut à moment donné passer à la limite dans la relation qui définit x_n, à savoir $x_n = \ln(x_n) - n$).

....

Exercice 15.30. 1. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'équation $x^n = nx - 1$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$, que l'on notera u_n.

2. Soit (v_n) une suite décroissante d'éléments de $[0\,;1[$ qui converge. Montrer que (v_n^n) converge vers 0.

3. Prouver que la suite u ainsi définie est monotone et déterminer la valeur de sa limite.

Indication 15.30. **1.** Célèbre théorème.

2. Notons ℓ la limite. Puisque v est décroissante, $\ell \leqslant v_n \leqslant v_0$. Ensuite, vous pouvez encadrer v_n^n, raisonner par l'absurde en supposant $\ell \neq 0$, obtenir la limite de (v_n^n) avec le théorème d'encadrement et conclure.

3. Peu guidé, mais la méthode est classique (donc à connaître !). Voici les étapes à suivre :

- si on note $f_n : x \longmapsto x^n - nx + 1$ définie sur $[0\,;\,1]$, déterminer le signe de $x \longmapsto f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0\,;\,1]$;
- en déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$;
- en déduire les variations de (u_n) ;
- en déduire que la suite (u_n) converge ;
- en notant ℓ sa limite et en passant à la limite dans la relation de définition de la suite u, obtenir la valeur de ℓ (c'est ici que la question **2.** est utile !).

Suites complexes

Exercice 15.31. Soit u la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = iu_n + 2i.$$

Déterminer le terme général de u et, si elle existe, sa limite.

Indication 15.31. Il faut reconnaître une suite usuelle et appliquer la méthode adéquate. Pour déterminer si la suite admet une limite, vous pouvez vous intéresser à $(u_{4n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{4n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 15.32. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = a + ib$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3u_n + 2\overline{u_n})$. Cette suite est-elle convergente, et si oui, quelle est sa limite ?

Indication 15.32. Vous pouvez introduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \mathfrak{Re}(u_n)$ et $b_n = \mathfrak{Im}(u_n)$. Ces deux suites sont usuelles, donc vous pouvez trouver leur terme général.

Exercice 15.33. On considère les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{3}y_n \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = -\frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}y_n.$$

Montrer que la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $z_n = x_n + iy_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire la convergence de (x_n) et (y_n).

Indication 15.33. Rien de particulier.

Exercice 15.34. Déterminer, si elles existent, les limites des suites de terme général :

1. $z_n = \mathrm{e}^{-n} + \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} + i\sqrt{\dfrac{4n^2+5}{2n^2-n}}$; **2.** $z_n = \left(\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$; **3.** $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{in\pi/3}$;

4. $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{in\pi/3}$; **5.** $z_n = (n+1)\,\mathrm{e}^{i\left(2+\frac{1}{n}\right)}$; **6.** $z_n = \left(1+\dfrac{i\pi}{n}\right)^n$.

Indication 15.34. **1.** Vous pouvez commencer par trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathfrak{Re}(z_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathfrak{Im}(z_n)$.

2. Vous pouvez chercher la forme exponentielle de z_n puis la limite de $(|z_n|)$.

3. La suite n'a pas de limite : vous pouvez chercher deux suites extraites de limites distinctes.

4. Vous pouvez chercher la limite de $(|z_n|)$. Que vaut $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$?

5. Vous pouvez chercher la limite de $(|z_n|)$.

6. Vous pouvez chercher la limite de $(\mathfrak{Re}(z_n))$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))$. Que valent $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$?

Exercice 15.35. On considère la suite z de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 \in \mathbf{C}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_{n+1} = 2z_n - \overline{z_n}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_0 pour que la suite z converge.

Indication 15.35. Vous pouvez introduire $x_n = \mathfrak{Re}(z_n)$, $y_n = \mathfrak{Im}(z_n)$ puis montrer que ce sont des suites usuelles (chercher à exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et y_{n+1} en fonction de y_n), déterminer leur terme général et conclure.

Exercice 15.36. On définit la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $z_0 \in \mathbf{C}$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

1. Étudier cette suite lorsque z_0 est un réel négatif

2. Étudier cette suite lorsque z_0 est un réel positif

3. Montrer que si z_0 est un nombre complexe non réel, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, z_n est un nombre complexe non réel.

4. On suppose désormais que z_0 est un complexe non réel. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, où $r_n \in]0\,;+\infty[$ et $\theta_n \in]-\pi\,;\pi] \setminus \{0\}$.

- **(a)** Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique. Préciser sa raison et exprimer son terme général en fonction de n et θ_0.
- **(b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_n = r_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$
- **(c)** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $w_n = 2^n r_n \sin\left(\dfrac{\theta_0}{2^n}\right)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
- **(d)** Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le réel $r_0 \dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Indication 15.36. **1.** Vous pouvez commencer par calculer z_1.

2. Idem.

3. On demande de démontrer une propriété sur des entiers naturels, une forme de raisonnement est adaptée ☺ Vous pouvez introduire la partie réelle et la partie imaginaire de z_n.

4.
- **(a)** Commencer par chercher la forme exponentielle de z_{n+1}.
- **(b)** Récurrence avec la question précédente.
- **(c)** Rien à signaler.
- **(d)** La limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ est utile.

Suites usuelles

Exercice 15.37. Déterminer le terme général de la suite réelle u définie par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 1$.

3. $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

4. $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 4$.

5. $u_0 = 3$, $u_1 = 4$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.

6. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

7. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

8. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

9. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

10. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

11. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. Montrer qu'on peut écrire le terme général sous la forme $u_n = A\cos(n\theta + \phi)$, où A, θ et ϕ sont des réels à préciser. Montrer que u est périodique de période 3.

12. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

13. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

14. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - 4u_n$.

15. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -\dfrac{1}{4}u_n$.

Indication 15.37 . Il faut reconnaître une suite usuelle et appliquer la méthode adéquate. Pour la question **14.**, vous pouvez utiliser la fonction arctangente pour trouver un argument des complexes qui sont solution de l'équation caractéristique.

. . . .

Exercice 15.38. **1.** Déterminer le terme général des suites définies par :

- **(a)** $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.
- **(b)** $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 4v_n^3$.
- **(c)** $w_0 = 0$, $w_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_{n+2} = 6w_{n+1} - 9w_n$.
- **(d)** $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_{n+2} = 6r_{n+1} - 8r_n + 2$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k$ et $\sum\limits_{k=3}^{n} r_k$.

Indication 15.38. **1.** **(a)** Rien à signaler.

- **(b)** Vous pouvez introduire la suite $\tilde{v}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $\tilde{v}_n = \ln(v_n)$ (après avoir justifié que c'était légitime).
- **(c)** Rien à signaler.
- **(d)** Il faut s'inspirer de ce qui a été fait dans le chapitre sur les équations différentielles.
  - Vous pouvez commencer par chercher l'ensemble des suites de
  $$H = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n \right\}.$$
  - Notons $E = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n + 2 \right\}$. Vous pouvez chercher une suite constante v appartenant à E.
  - Soit u une suite quelconque. Vous pouvez montrer l'équivalence $u \in E \iff u - v \in H$.
  - Il ne reste plus qu'à conclure !

2. Calculs classiques de sommes.

. . . .

Exercice 15.39. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0 \in \mathbf{R}$ et $v_0 \in \mathbf{R}$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + 3u_n) \end{cases}$$

1. Donner l'expression des termes généraux de $(u_n - v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. En déduire l'expression des termes généraux u_n et v_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Indication 15.39. **1.** Il faut calculer d'abord $u_{n+1} + v_{n+1}$ et reconnaître une suite usuelle avant de pouvoir trouver son terme général. Idem pour $u - v$.

2. Il faut résoudre un système en utilisant la question **1.**.

. . . .

Exercice 15.40. On note E l'ensemble des suites réelles u vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2.$$

1. Montrer que E contient une suite de la forme $(an^2 + bn + c)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

2. En déduire l'expression du terme général d'une suite d'éléments de E.

3. Montrer qu'il existe une unique suite u dans E vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, et donner l'expression de son terme général.

Indication 15.40. **1.** On peut procéder par analyse/synthèse (on trouve le triplet (a, b, c) dans la phase d'analyse).

2. Il faut s'inspirer du cours sur les équations différentielles. On peut résoudre « l'équation homogène »,*i.e.* chercher l'ensemble H des suites u vérifiant $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (suite récurrente double). Ensuite, si on note v la suite obtenue à la question 1., il faut montrer que $u \in E \iff u - v \in H \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \ldots$.

3. Si $u \in E$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que... Les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ permettent de déterminer α et β.