TD 14 Arithmétique dans l'ensemble des entiers

Divisibilité

Exercice 14.1. **1.** Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $n^3 - n$ est divisible par 6.

2. Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 9.

Indication 14.1. **1.** Vous pouvez démontrer que $n^3 - n$ est divisible par 2 et par 3 (pourquoi est-ce suffisant ?). Pour la divisibilité par 3, il faut distinguer trois cas suivant que $n \equiv 0$ [3], $n \equiv 1$ [3] ou $n \equiv 2$ [3]. Même idée pour la divisibilité par 2.

2. Vous pouvez la somme des cubes de trois entiers naturels positifs comme $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$. Une fois cette somme développée et simplifiée, la question **1.** pourra être utile.

Exercice 14.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Indication 14.2. Il faut développer $(n+1)^n - 1$ avec une célèbre formule et chercher à factoriser cette expression par n^2.

Exercice 14.3. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que pour tout entiers naturels a, b et p, si $a \equiv b$ $[p]$, alors $a^n \equiv b^n$ $[p]$.

2. Montrer que le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Indication 14.3. **1.** Si $a \equiv b$ $[p]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que... La formule du binôme de Newton est utile aussi !

2. On peut utiliser la question **1.** ou faire une récurrence.

Exercice 14.4. **1.** Montrer que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^n par 9 est égal à 1. En déduire le critère de divisibilité par 9 : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2. Démontrer le critère de divisibilité par 11 : un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11 (la somme alternée de 123 456 est $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$).

Indication 14.4. **1.** Vous pouvez utiliser des congruences ou appliquer la formule du binôme de Newton.

2. Idem (pour les congruences, il faut d'abord montrer par récurrence que $10^k \equiv (-1)^k$ [11] pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exercice 14.5. Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ les équations suivantes.

1. (E_1) : $xy = 2x + 3y$; **2.** (E_2) : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$; **3.** (E_3) : $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

Indication 14.5. **1.** Vous pouvez vous ramener à un produit égal à 6. Il ne reste plus qu'à énumérer tous les produits d'entiers qui peuvent être égaux à 6 (il y a 8 solutions).

2. Vous pouvez procéder par analyse/synthèse. Dans la phase d'analyse, montrer que x ou y est divisible par 5. Si $5 \mid x$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}^\star$ tel que $x = 5k$. Vous pouvez montrer que $k \in [\![-4, 2, 6]\!]$, ce qui fournit trois candidats solutions. On en obtient trois autres en partant de $5 \mid y$.

3. Vous pouvez déjà montrer que $(E_3) \iff (x+y-1)(x-y-3) = 8$. Il n'y a que 8 façons d'écrire 8 comme produit de deux entiers, donc il y a 8 systèmes à résoudre (en fait c'est toujours le même, seul le second membre change ; il est donc malin de résoudre le système avec un second membre général : $\left\{ \begin{array}{lll} x+y-1 & = & a \\ x-y+3 & = & b \end{array} \right.$). À la fin, il reste quatre solutions.

Division euclidienne

Exercice 14.6. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) avec $a < 4000$ tels que que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47.

Indication 14.6. Vous pouvez écrire la division euclidienne, puis montrer que $b = 48$ et en déduire immédiatement a.

Exercice 14.7. On divise deux entiers naturels distincts a et b avec $a > b$ par leur différence $a - b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

Indication 14.7. Si on note q, r (resp. q', r') les quotient et reste de la division euclidienne de a (resp. b) par $a - b$, il faut montrer que $r = r'$ et $q = q' + 1$.

Exercice 14.8. Soit $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^\star$, on note q le quotient de la division euclidienne de $(a-1)$ par b et r son reste. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

Indication 14.8. Il faut écrire la division euclidienne de $a - 1$ par b pour commencer. Ensuite, il faut recomposer à partir de cette égalité l'expression $ab^n - 1$, puis chercher à écrire le résultat sous la forme $Q \times b^{n+1} + R$ et enfin montrer que $0 \leqslant R < b^{n+1}$.

Nombres premiers

Exercice 14.9. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, l'entier $5^n - 3^n$ n'est pas un nombre premier.

Indication 14.9. Il existe une formule pour factoriser ce type d'expression dans le cours sur les sommes.

Exercice 14.10. Soit a et b deux entiers naturels de même parité. Montrer que $\dfrac{a^3 + b^3}{2}$ est un entier naturel non premier.

Indication 14.10. Il faut factoriser et montrer qu'aucun des termes du produit n'est égal à 1 (quitte à distinguer des cas !).

Exercice 14.11. Soit n un entier naturel non nul et q un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que si q divise n, alors q ne divise pas $n + 1$. En utilisant ce résultat, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Indication 14.11. Raisonnement par l'absurde pour le début de la question.
Raisonnement par l'absurde pour en déduire que l'ensemble des premiers est infini.

Exercice 14.12. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'aucun des entiers

$$n! + 2, \quad n! + 3, \quad \cdots \quad n! + n$$

n'est premier. Que peut-on en déduire ?

Indication 14.12. Il faut factoriser !

Exercice 14.13 (*Nombres de Mersenne*). **1.** Soit p et q deux entiers naturels. Montrer que $(2^p - 1) \mid (2^{pq} - 1)$.

2. En déduire que pour tout entier naturel, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

3. La réciproque est-elle vraie ? (on pourra tester les entiers premiers inférieurs à 13 ; exceptionnellement, vous pouvez vous aider d'un ordinateur !).

Indication 14.13. **1.** Il faut factoriser $2^{pq} - 1^q$ par $2^p - 1$ (il existe une formule utile dans le cours sur les sommes).

2. Contraposition.

3. Vous pouvez écrire un algorithme Python pour chercher un contre-exemple.

Exercice 14.14 (*Petit théorème de Fermat*). Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

2. En déduire que pour tout entier a, $a^p - a$ est un multiple de p. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

Indication 14.14. **1.** Il faut écrire $\binom{k}{p}$ sous forme factorielle pour en déduire une expression de $p!$. Il reste à voir ensuite que p divise $\binom{k}{p}$ (vous pouvez utiliser ce résultat intuitif, appelé **lemme d'Euclide** : pour tout N, A, B entiers, si un $N = AB$ et N ne divise pas A, alors N divise B).

2. Récurrence.

Plus grand comme diviseur, plus petit commun multiple

Exercice 14.15. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que les fractions $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ et $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ sont irréductibles.

Indication 14.15. PGCD ou récurrence.

Exercice 14.16. On divise 2003 par n, le reste est égal à 8. On divise 3002 par n, le reste obtenu est 27. Que vaut n ?

Indication 14.16. Traduire les hypothèses (introduire les différents quotients et écrire la formule de division euclidienne) et se ramener à la recherche d'un PGCD.

Exercice 14.17. **1.** Déterminer les entiers naturels vérifiant $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x,y) & = & 3 \\ x+y & = & 21 \end{array}\right.$.

2. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x,y) & = & 6 \\ \mathrm{PPCM}(x,y) & = & 72 \end{array}\right.$.

Indication 14.17. **1.** Vous pouvez faire une analyse/synthèse. Dans la phase d'analyse, si (x,y) est une solution du problème, poser $x' = \dfrac{x}{3}$ et $y' = \dfrac{y}{3}$, de sorte que x' et y' soient premiers entre eux. Vous obtenez aussi $x' + y' = 7$, donc il faut tester tous les couples possibles.

2. Même idée.

Exercice 14.18. Soit $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^\star$. On note r et q respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b.

1. Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

2. En déduire que $\mathrm{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{PGCD}(a,b)} - 1$

Indication 14.18.

1. Il faut écrire $2^a - 1$ sous la forme $(2^b - 1) \times Q + 2^r - 1$. Une formule de factorisation du cours sur les sommes est utile.
2. Algorithme d'Euclide.

. . . .

Exercice 14.19 (*Nombres parfaits*). Soit a et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $M = a^p - 1$ est un nombre premier.

1. Montrer que $a = 2$.
2. Montrer que p est premier. Vous pouvez utiliser l'Exercice 14.18.
3. Un nombre n est dit **parfait** si la somme de ses diviseurs est égale à son double. Montrer que $2^{p-1}M$ est un nombre parfait.

Indication 14.19.

1. Une formule de factorisation du cours sur les sommes est utile pour factoriser $a^p - 1$. Vous pouvez raisonner par l'absurde pour montrer que $a = 2$.
2. Vous pouvez raisonner par l'absurde.
3. Vous pouvez lister les diviseurs de $N = 2^{p-1}M$ aisément puisque M est premier (il y en a $2p$). Il ne reste plus qu'à les ajouter !