TD 13 L'ensemble des nombres réels

Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure

Exercice 13.1. Montrer que l'ensemble E suivant est borné et en donner un majorant et un minorant.

$$E = \left\{ \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+1} \; : \; n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Indication 13.1. Un minorant est assez rapide à trouver, si vous vous rappelez que la fonction racine carrée est croissante.
Pour trouver un minorant, vous pouvez étudier les variations de $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2+1} \end{array}$ et montrer soigneusement que $(f(n))_{n \geqslant 2}$ est décroissante. Il reste à majorer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ pour trouver un majorant.

Exercice 13.2. Calculer les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \; : \; n \in \mathbf{N}^\star \right\}.$$

Indication 13.2. Facile, car l'ensemble admet un minimum et un maximum.

Exercice 13.3. Pour chacun des ensembles suivants, décider s'ils sont majorés ou minorés et, le cas échéant, trouver leur borne supérieure ou inférieure.

1. $A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \; : \; (n,m) \in (\mathbf{N}^\star)^2 \right\}$; **2.** $B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \; : \; n \in \mathbf{N}^\star \right\}$; **3.** $C = \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \; : \; x \in \mathbf{R}_+^\star \right\}$;

4. $D = \left\{ \frac{x^2-3x+6}{x-2} \; : \; x \in \left]3\,;\,6\right[\right\}$; **5.** $E = \left[\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}\right] \cap \mathbf{Q}$.

Indication 13.3. Exercice d'application directe. Par exemple, pour déterminer la borne supérieure d'un ensemble E : on conjecture une valeur possible M, montre que M est un majorant. On essaie de voir si $M \in E$, auquel cas $\max(E) = M$, d'où $\sup(E) = M$. Sinon, il faut utiliser un critères de caractérisation de la borne supérieure vus en cours.
Pour la question **4.**, vous pouvez faire une étude de fonction, en déduire l'ensemble des minorants/majorants et conclure rapidement.
Pour la question **5.**, les approximations décimales strictes (c'est-à-dire avec des inégalités strictes au lieu d'inégalités larges dans la définition) par défaut ou par excès pourront être utiles.

Exercice 13.4. **1.** Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que :

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \; : \; (m,n) \in \mathbf{N}^2 \right\}$$

est majoré et minoré, puis déterminer ses bornes inférieure et supérieure.

Indication 13.4. Rien de particulier. L'ensemble A admet un maximum, mais pas de minimum.

Exercice 13.5. **1.** Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$ et α un nombre réel tel que pour tout $x \in A$, $x \leqslant \alpha$.

- **(a)** Justifier que A possède une borne supérieure finie et que $\sup A \leqslant \alpha$.
- **(b)** On suppose que pour tout $x \in A$, $x < \alpha$. A t-on $\sup(A) < \alpha$?

2. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbf{R}$.

- **(a)** Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.
- **(b)** Montrer que $A \cup B$ est majorée. Justifier que la borne supérieure de $A \cup B$ existe, est finie, et la déterminer.

Indication 13.5. **1.** **(a)** Il n'y a pas de calcul, on interprète simplement la définition de borne supérieure (plus petit des majorants) pour obtenir le résultat demandé.

- **(b)** C'est faux : il faut trouver un contre-exemple.

2. **(a)** Même idée que dans la question **1.** : il faut utiliser que la borne supérieure est le plus petit des majorants.

- **(b)** Montrer que la borne supérieure existe et est finie n'est pas difficile.
  Il faut ensuite montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$. Vous pouvez montrer assez rapidement (en utilisant la question précédente) que $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\sup(A), \sup(B))$. Pour l'autre inégalité, vous pouvez raisonner par l'absurde.

Exercice 13.6. Soit A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$ telles que pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, $x \leqslant y$.
Justifier l'existence et la finitude de la borne supérieure de A et de la borne inférieure de B et démontrer : $\sup A \leqslant \inf B$.

Indication 13.6. Vous pouvez raisonner par l'absurde.

Exercice 13.7. Pour toutes parties A et B de $\mathbf{R}$, on introduit l'ensemble

$$A + B = \{a + b \ : \ (a, b) \in A \times B\}$$

1. Déterminer $A + B$ lorsque $A = [0\,;\,1]$ et $B = [0\,;\,1]$.
2. Déterminer $A + B$ lorsque $A =]0\,;\,1]$ et $B = [0\,;\,1[$.
3. Soit A et B deux parties de $\mathbf{R}$ non vides et majorées. Montrer que $A + B$ est une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$, puis comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Indication 13.7. **1.** On conjecture que $A + B = [0\,;\,2]$, et on montre cette égalité d'ensembles par double inclusion.

2. Même idée qu'avant, en faisant bien attention aux bornes ouvertes et fermées. On rappelle que si $a \geqslant b$ et $c > d$, alors $a + c > b + d$, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.

3. Puisque $A + B$ est non vide majorée, ... Pour déterminer $\sup(A + B)$, il faut un candidat. On parle aussi de $\sup(A) + \sup(B)$ dans l'énoncé...

Exercice 13.8. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbf{R}$. On pose

$$B = \left\{|x - y| \ : \ (x, y) \in A^2\right\}.$$

Montrer que B admet une borne supérieure finie et prouver que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Indication 13.8. Pour montrer que B admet une borne supérieure, il faut justifier que B est non vide et trouver un majorant (il est donné dans l'énoncé si vous lisez bien). Pour prouver que ce majorant M est la borne supérieure de B, on pourra s'en donner un autre M_1, et montrer que $M_1 \leqslant M$, en utilisant l'inégalité

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x - y \leqslant |x - y| \leqslant M_1,$$

par exemple, de laquelle on peut déduire

$$\forall y \in A, \quad \sup(A) \leqslant M_1 + y.$$

Ainsi $\sup(A) - M_1$ minore A et l'on peut conclure.

. . . .

Exercice 13.9. Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow [0\,;\,1]$ une fonction croissante. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0\,;\,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$ (on dit que x_0 est un **point fixe** de f).
Posons $A = \{x \in [0\,;\,1] \mid f(x) \geqslant x\}$.

1. Justifier l'existence de la borne supérieure de l'ensemble A. On note a cet élément. Montrer que $a \in [0\,;\,1]$.
2. Montrer que $f(A) \subset A$.
3. Montrer que $f(a)$ majore A.
4. En déduire que a est un point fixe de f.
5. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose que f est une fonction croissante de $[0\,;\,1[$ dans $[0\,;\,1[$?

Indication 13.9.

1. L'existence est donnée par un théorème du cours.
   Pour montrer que $a \in [0\,;\,1]$. On peut remarquer que $0 \in A$ pour $a \geqslant 0$. On peut raisonner par l'absurde pour $a \leqslant 1$, et utiliser une des caractérisations de la borne supérieure.
2. Simple inclusion d'ensemble. Il faut traduire ce que signifie appartenir à l'image directe de A pour commencer.
3. Si $x \in A$, alors $x \leqslant a$. On rappelle que f est croissante... Il faut aussi utiliser que $x \in A$ signifie $x \leqslant f(x)$.
4. Le point fixe est a ; on peut montrer que $f(a) = a$ par double inégalité.
5. Le résultat n'est plus vrai. Il existe un contre-exemple très (très) simple.

Retour sur la partie entière

. . . .

Exercice 13.10. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Indication 13.10. Vous pouvez travailler uniquement avec des inégalités ou introduire les parties fractionnaires de x et de y (on rappelle que si $x \in \mathbf{R}$, la partie fractionnaire de x est $r \in [0\,;\,1[$ et elle vérifie $x = \lfloor x \rfloor + r$). La croissance de la partie entière est utile dans tous les cas car il faut commencer par justifier que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$.

. . . .

Exercice 13.11. Montrer que pour tout nombre réel x, $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Indication 13.11. Vous pouvez introduire la partie fractionnaire de x (on rappelle que si $x \in \mathbf{R}$, la partie fractionnaire de x est $r \in [0\,;\,1[$ et elle vérifie $x = \lfloor x \rfloor + r$), puis distinguer des cas suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$.