

TD 12

ENSEMBLES ET
APPLICATIONS

Ensembles

Exercice 12.1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Parmi les assertions suivantes, lesquelles n'ont pas de sens ? Lesquelles sont vraies ?

- | | | | |
|--|--|---|--|
| (a) $a \in E$; | (b) $a \subset E$; | (c) $a \in \mathcal{P}(E)$; | (d) $a \subset \mathcal{P}(E)$; |
| (e) $\{a\} \in E$; | (f) $\{a\} \subset E$; | (g) $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$; | (h) $\{a\} \subset \mathcal{P}(E)$; |
| (i) $\emptyset \in E$; | (j) $\emptyset \subset E$; | (k) $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$; | (l) $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$; |
| (m) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(E)$; | (n) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$; | (o) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. | |

Indication 12.1. Le symbole $\in$ doit être placé entre un élément et un ensemble. Le symbole $\subset$ doit être placé entre deux ensembles. $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble (d'ensembles).

Exercice 12.2. Introduisons les ensembles :

$$A = \{2k : k \in \mathbf{Z}\}, \quad B = \{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 0 [2]\}, \quad C = \emptyset, \quad D = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 = 4x\}, \quad E = \{n \in \mathbf{Z} \mid e^{i\frac{n\pi}{2}} = 1\}.$$

Énoncer toutes les relations d'inclusion existant entre ces différents ensembles.

Indication 12.2. Vous pouvez commencer par expliciter D et E .

Exercice 12.3. Montrer les égalités ou les inclusions d'ensembles suivantes :

- $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) = 0\}$;
- $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall y \in \mathbf{R}_+, x \leq y\}$;
- $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbf{R}_+$;
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists t \in \mathbf{R}_+, x = \ln(t) \text{ et } y = t - 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$;
- $\{(1 + 2t, 2 - t, -1 + 3t) : t \in \mathbf{R}\} \subset \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 5\}$;
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x - y = 1\} = \{(t + 1, 4t + 3) : t \in \mathbf{R}\}$.

Indication 12.3. C'est un exercice de rédaction ! La méthode pour montrer une inclusion est dans le cours. Pour montrer une égalité d'ensembles, vous pouvez procéder par double inclusion. On rappelle que $x \in \{x \in E \mid P(x) \text{ est vraie}\} \iff P(x)$ est vraie si $P(x)$ est une assertion mathématique. De plus, $x \in \{f(t) : t \in E\} \iff \exists t \in E, x = f(t)$.

Exercice 12.4. On considère

$$E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & Ae^t + Be^{-t} \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & A \operatorname{ch}(t) + B \operatorname{sh}(t) \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Montrer par double inclusion que ces deux ensembles sont égaux.

Indication 12.4. Exercice de rédaction. Il faut procéder par double inclusion. Les ensembles contiennent des fonctions, donc le début de la rédaction devra ressembler à : « Soit $f \in E$. Il existe $A, B \in \mathbf{R}$ tels que $f : t \longmapsto Ae^t + Be^{-t}$, etc. »

Exercice 12.5. Pour chaque question, montrer que les ensembles E et F sont égaux.

1. $E = \{x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$ et $F = \{x \mapsto A \cos(-x) + B \sin(-x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.
2. $E = \{x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$ et $F = \{x \mapsto A \cos(x+B) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.

Indication 12.5. Exercice de rédaction. Attention, les ensembles sont des ensembles de fonctions. Pour la question 2., la méthode pour simplifier une expression de la forme $A \cos(x) + B \sin(x)$ est dans le cours de trigonométrie.

- Exercice 12.6.**
1. Montrer que l'ensemble $E = \{z \in \mathbf{C} \mid \bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)\}$ est inclus dans l'ensemble $F = \{0\} \cup \mathbf{U}$.
 2. Soit $z \in \mathbf{U}$. Posons θ l'argument de z appartenant à $] -\pi ; \pi]$. Montrer que $z \in E$ si et seulement si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.
 3. Déterminer en extension l'ensemble E .

- Indication 12.6.**
1. Vous pouvez montrer que $z = \frac{|z|^2 - \bar{z}}{|z|^2 - z}$ (attention à ce que le dénominateur ne s'annule pas).
 2. Puisque $z \in \mathbf{U}$, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Puisque $z \in E$, il vérifie l'équation dans E . Vous pouvez factoriser par l'angle moitié à un moment ou à un autre.
 3. Il n'y a plus de calcul, il faut interpréter les résultats précédents.

Exercice 12.7. Prouver que : $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right[= \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Indication 12.7. Double inclusion. Pour $\subset$, vous pouvez raisonner par l'absurde pour montrer qu'un élément de $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right[$ n'est pas dans $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Exercice 12.8. Déterminer les ensembles suivants sous forme d'intervalle (on démontrera bien sûr les conjectures faites).

1. $A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} [0 ; k]$;
2. $B = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \left[0 ; \frac{1}{k} \right]$;
3. $C = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} \left] 0 ; \frac{1}{k} \right[$.

Indication 12.8. Il faut conjecturer les ensembles à déterminer. Ensuite, il faut démontrer des égalités d'ensembles ; on pourra procéder par double inclusion.

1. Pour l'inclusion difficile, vous pourrez raisonner par l'absurde et utiliser que $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$ est un entier supérieur à $\frac{1}{x}$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.
2. Pour l'inclusion difficile : on cherche $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $0 \leq x \leq \frac{1}{k}$. Or on sait que

$$0 \leq x \leq \underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{1/k}$$

donc $\frac{1}{k} = \lfloor x \rfloor + 1$ puis $k = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}$ par exemple.

Exercice 12.9. Prouver que : $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right[= \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Indication 12.9. Double inclusion. Pour $\subset$, vous pouvez raisonner par l'absurde pour montrer qu'un élément de $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right[$ n'est pas dans $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Exercice 12.10. Soit $n \geq 3$ un entier. On considère un jeu de 32 cartes et on tire n cartes avec remise. On note, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, R_k l'ensemble des tirages où on obtient un roi au k -ième tirage.

Écrire les ensembles suivants uniquement avec $R_1, \dots, R_n$ (on pourra ne pas utiliser tous ces ensembles ; on pourra utiliser des unions, des intersections, des complémentaires...). Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. A : l'ensemble des tirages où on obtient des rois aux trois premiers tirages.
2. B_j : l'ensemble des tirages où on obtient des rois aux j premiers tirages.
3. C : l'ensemble des tirages où on n'obtient que des rois.
4. D : l'ensemble des tirages où on n'obtient aucun roi.
5. E : l'ensemble des tirages où le premier roi obtenu arrive au deuxième tirage.
6. F_j : l'ensemble des tirages où le premier roi arrive au j -ième tirage.
7. G : l'ensemble des tirages où on a obtenu au moins un roi.

Indication 12.10. On a fait un exercice très similaire dans le premier TD de l'année. Relire cet exercice vous sera sans doute utile!

Exercice 12.11. On lance indéfiniment un dé et on note E l'ensemble des tirages possibles. Pour tout entier $k \geq 1$, on note A_k l'ensemble des tirages où le dé tombe sur 6 au k -ième tirage.

On note, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, B_k l'ensemble des tirages où le dé tombe pour la première fois sur 6 au k -ième tirage. On note B_∞ l'ensemble des tirages où le dé ne tombe jamais sur 6.

1. Justifier que $\{A_1, A_2, \dots\} = \{A_j\}_{j \in \mathbf{N}^*}$ n'est pas une partition de E .
2. Justifier que $\{B_j\}_{j \in \mathbf{N}^*}$ n'est pas une partition de E .
3. Montrer que $\{B_j\}_{j \in \mathbf{N}^*} \cup \{B_\infty\}$ est une partition de E .

Indication 12.11. 1. Vous pouvez considérer un tirage qui commence par deux 6.

2. Vous pouvez considérer un tirage qui ne contient que des 1.
3. Il faut vérifier les deux points de la définition.

Exercice 12.12. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.

Indication 12.12. Il faut commencer par $\mathcal{P}(\{1\})$.

Exercice 12.13. 1. Décrire les ensembles $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ et $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

2. Conjecturer le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ pour un entier naturel n fixé.

Indication 12.13. Il y a 8 éléments dans $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ et 16 dans $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

Exercice 12.14. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f définies sur $\mathbf{N}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifiant pour tout $(n, m) \in \mathbf{N}^2$,

$$f(n + m) = f(n)f(m).$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
 - (a) Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$.
 - (b) Supposons $f(0) = 0$. Montrer que $f = 0$.
 - (c) Supposons $f(0) = 1$. Posons $a = f(1)$. Montrer que $f(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 - (d) Quelle inclusion d'ensemble a-t-on établie?
2. Conclure.

Indication 12.14. 1. (a) Il faut bien choisir n et m .

- (b) Même idée (vous pouvez donner une valeur à m et laisser n quelconque).
- (c) On veut montrer une assertion pour tout $n \in \mathbf{N}$, un certain type de raisonnement est adapté!

(d) Il faut interpréter ce qui a été fait.

2. Il n'y a plus beaucoup à faire (mais il y a faire tout de même!).

Exercice 12.15. Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

1. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$
2. Montrer que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.

Indication 12.15. 1. Il y a une équivalence à démontrer : vous pouvez raisonner par double implication. Pour démontrer une égalité d'ensembles, on peut raisonner par double inclusion.

2. Encore une double inclusion!

Applications

Exercice 12.16. L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$? Est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$?

Indication 12.16. • Pour l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, vous pouvez résoudre, pour tout $y \in \mathbf{R}$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

- Pour l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, vous pouvez utiliser la définition de l'injectivité. Si vous pensez que l'application n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de l'espace d'arrivée qui n'a pas d'antécédent pour le démontrer.

Exercice 12.17. On considère l'application $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$.

$$z \longmapsto e^z$$

1. L'application f ainsi définie est-elle injective? surjective?
2. Déterminer et représenter dans le plan de Cauchy l'image réciproque de $\mathbf{U}$ par f .
3. Déterminer et représenter dans le plan de Cauchy l'image directe de l'ensemble $A = \left\{x + i\frac{\pi}{4} : x \in \mathbf{R}\right\}$ par f .

Indication 12.17. 1. Essayer de voir si un élément a plusieurs antécédents, si un élément n'a pas d'antécédent.

2. Il faut se donner un z complexe au départ, et traduire par équivalence (en utilisant les définitions du cours) $z \in f^{-1}(\mathbf{U})$, jusqu'à obtenir une assertion suffisamment simple pour savoir la représenter dans le plan.

3. Même idée!

Exercice 12.18. L'application $f : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$ est-elle injective, surjective, bijective?

$$(n, m) \longmapsto n + m$$

Indication 12.18. L'application n'est pas injective (le prouver en déterminant x et x' distincts avec $f(x) = f(x')$). L'application est surjective (pour $n \in \mathbf{N}$ quelconque, déterminer un couple d'entiers (a, b) tel que $f(a, b) = n$).

Exercice 12.19. Soit $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$.

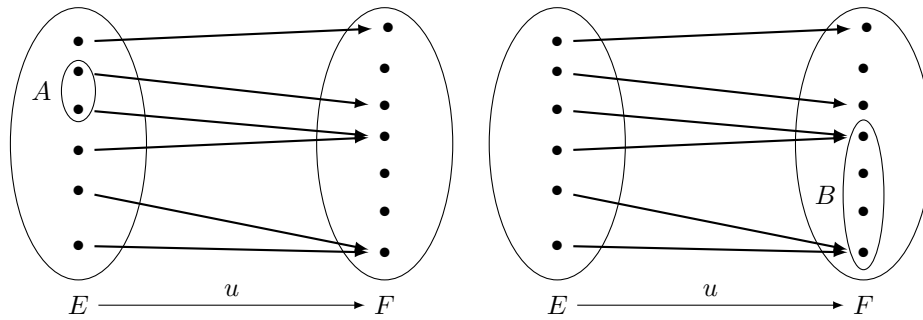
$$n \longmapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que f est bien définie (ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \in \mathbf{Z}$ ici).
2. Montrer que f est bijective.

Indication 12.19. 1. Il faut évidemment séparer les cas suivant la parité de n .

2. Il faut appliquer les définitions (résoudre une équation paraît pénible à rédiger, mais peut être que cela se fait, je n'ai pas essayé ☺).

Exercice 12.20. On considère l'application u de l'ensemble E dans l'ensemble F , une partie A de E et une partie B de F . Déterminer les ensembles $u(A)$, $u^{-1}(B)$, $u^{-1}(u(A))$ et $u(u^{-1}(B))$.



Indication 12.20. Rien de particulier.

Exercice 12.21. On considère $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, ainsi que $A = \llbracket 0, 10 \rrbracket$, B l'ensemble des entiers pairs, C l'ensemble des entiers impairs, $D = \{0, 1, 2\}$ et $E = \{4k + 1 : k \in \mathbf{N}\}$.

1. Déterminer l'image directe par f des ensembles A , D et $\mathbf{N}$.
2. Déterminer l'image réciproque par f des ensembles D , E et $\mathbf{N}$.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Indication 12.21. 1. Il faut utiliser les méthodes et les définitions du cours (il faut être bien sûr très vigilant quant aux ensembles de départ et d'arrivée).
La fonction est injective mais pas surjective.

Exercice 12.22. On considère l'application $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, ainsi que $A = \llbracket 0, 9 \rrbracket$, B l'ensemble des entiers pairs, C l'ensemble des entiers impairs, $D = \{0, 1, 2\}$ et E l'ensemble des carrés parfaits.

1. Déterminer l'image par f des ensembles A , B et C .
2. Déterminer l'image réciproque par f des ensembles D , E et $\mathbf{N}$.
3. f est-elle injective ? surjective ?

Indication 12.22. 1. $f(A)$ est simple à obtenir. Vous pouvez montrer que $f(B) = E$ et $f(C) = \mathbf{N}$.
2. Pour trouver $f^{-1}(D)$, vous pouvez chercher à résoudre les équations $f(n) = 0$, $f(n) = 1$ et $f(n) = 2$ (pour cela il faut distinguer le cas où n est pair et le cas où n est impair ; il y a 2 solutions pour les deux premières équations et une seule pour la dernière).
Vous pouvez montrer que $f^{-1}(E) = B \cup \{2k^2 + 1 : k \in \mathbf{N}\}$.
 $f^{-1}(\mathbf{N})$ est immédiat.
3. Assez rapide.

Exercice 12.23. On introduit l'application $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-2; +\infty[$ sur son image et déterminer l'application réciproque associée.
2. Déterminer $f([-3; 0])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}([0; 1])$.

Indication 12.23. 1. Un célèbre théorème étudié dans un chapitre précédent aide grandement !
2. Il faut encore utiliser le théorème précédent pour trouver $f([-3; 0])$. Les images réciproquement s'obtiennent en résolvant des équations ou en manipulant des inégalités.

Exercice 12.24. On considère la fonction $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbf{C}$.

$$z \longmapsto \frac{\bar{z} + 1}{z - 1}$$

1. Montrer que pour tout $\mathbf{C} \setminus \{1\}$, $f(z) \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble $f(i\mathbf{R})$.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Indication 12.24. 1. Vous pouvez raisonner par l'absurde.

2. Rien de particulier, il faut utiliser les définitions du cours et raisonner par équivalences.
3. Immédiat avec les questions précédentes.

Exercice 12.25. On considère l'application $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
3. Déterminer $f([0; 1])$.

Indication 12.25. 1. Assez rapide.

2. Il faut résoudre une équation trigonométrique.
3. Un célèbre théorème peut être utile.

Exercice 12.26. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Lorsque celle-ci existe, déterminer l'application réciproque.

1. $f_1 : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$;

$$x \longmapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$$
2. $f_2 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$;

$$(x, y, z) \longmapsto (3x + y + z, x + 2z)$$
3. $f_3 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$;

$$(x, y, z) \longmapsto (3x + y + 2z, x + 2z, x + y - z)$$
4. $f_4 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$;

$$(x, y) \longmapsto (x - y, 2x + y, x + y)$$
5. $f_5 : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{U}$;

$$z \longmapsto \frac{z}{|z|}$$
6. $f_6 : \mathbf{C} \setminus \{2i\} \longrightarrow \mathbf{C}$.

$$z \longmapsto \frac{z + 1}{z - 2i}$$

Indication 12.26. Vous pouvez résoudre des équations pour chaque question (le nombre de solution est utile pour obtenir l'injectivité, la surjectivité ; la solution est utile pour la réciproque des applications bijectives).

Exercice 12.27. Soit $w \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{U}$. On considère l'application $f : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$.

$$z \longmapsto \frac{z + w}{1 + \bar{w}z}$$

1. Montrer que f est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbf{U}$, l'expression $f(z)$ est correctement définie et appartient à $\mathbf{U}$.
2. Montrer que f est bijective, et déterminer son application réciproque.

Indication 12.27. 1. Il faut se donner un élément $z \in \mathbf{U}$ et vérifier que $f(z) \in \mathbf{U}$.

2. Il faut résoudre une équation.

Exercice 12.28. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, surjective et donner, si possible, une description de son image par équations.

1. $f_1 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$;

$$(x, y) \longmapsto 3x + 4y$$

2. $f_2 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$;
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y + 2z, x + y + z, 2x + 2y + z, 3x + 3y + 3z)$
3. $f_3 : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$;
 $(x, y, z, t) \longmapsto (x + y + t, x + y + 2t, x + z)$
4. $f_4 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$.
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y - z, x + y - z, x - y, x - y)$

Indication 12.28. Par exemple, pour la question 2., il faut fixer un élément dans l'espace d'arrivée $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ et chercher un antécédent $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, ce qui revient à résoudre l'équation $f_2(x, y, z) = (a, b, c, d)$, qu'on peut écrire sous la forme d'un système linéaire. En comptant le nombre de solutions obtenues, on peut conclure quant à l'injectivité ou la surjectivité. Par ailleurs, $(a, b, c, d) \in f(\mathbf{R}^3)$ équivaut à dire qu'il existe un antécédent de (a, b, c, d) par f , ce qui revient à dire que le système linéaire $f_2(x, y, z) = (a, b, c, d)$ admet une solution. Autrement dit, trouver un système d'équations cartésienne de $f_2(\mathbf{R}^3)$ revient à chercher les conditions de compatibilité du système $f(x, y, z) = (a, b, c, d)$ (noter qu'une telle condition n'existe pas si l'application est surjective!).

Exercice 12.29. 1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ est bijective. Déterminer son application réciproque.
 $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$

2. Déterminer l'image réciproque par f de $E = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u = v\}$.

Indication 12.29. 1. Il faut résoudre un système linéaire.

2. Écrire E sous la forme $\{(\dots, \dots) : u \in \mathbf{R}\}$ pour commencer.

Exercice 12.30. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

1. Justifier que $f^{-1}(F) = E$.
2. A-t-on nécessairement $f(E) = F$? Si oui, le démontrer. Si non, quelle propriété doit vérifier f pour que cette égalité soit vraie?

Indication 12.30. Bien relire les définitions du cours, il n'y a pas beaucoup à dire.

Exercice 12.31. Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F .

1. Soit A, B deux parties de E . Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Que dire de l'assertion $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
2. Soit A, B deux parties de F . Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Que dire de l'assertion $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?

Indication 12.31. 1. C'est une question de rédaction, il faut écrire soigneusement les définitions et la réponse vient toute seule. L'assertion $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est fausse (il faut trouver un contre-exemple! vous pouvez, comme très souvent, choisir $f : x \longmapsto x^2$ avec de bons ensembles de départ, d'arrivée et des choix pertinents pour A et B).

2. Même idée. L'assertion $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ est vraie (il faut le démontrer!).

Exercice 12.32. Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G et h une application de G dans E . Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
3. si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective ;
4. si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective ;
5. si $h \circ g \circ f = \text{Id}_E$, alors f est injective et h est surjective.

Indication 12.32. Il faut aller doucement : bien écrire les hypothèses (les traduire mathématiquement au brouillon peut aider) puis écrire au brouillon ce que l'on veut (et traduire mathématiquement). Pour la question 1. par exemple, on suppose $g \circ f$ injective. On veut montrer que f est injective. D'après le schéma de preuve du cours, il faut se donner $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. A la fin, on doit obtenir $x = x'$.

La dernière question ne nécessite pas de longue démonstration : on peut la déduire des précédentes.

Exercice 12.33. Soit A une partie d'un ensemble E , B une partie d'un ensemble F et f une application de E dans F .

1. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et donner un exemple pour lequel $A \neq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$.
3. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et donner un exemple pour lequel $f(f^{-1}(B)) \neq B$.
4. Montrer que si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$.

Indication 12.33. Il faut écrire soigneusement les définitions. Pour les contre-exemple, vous pouvez utiliser $f : x \mapsto x^2$ en choisissant convenablement des espaces de départ et d'arrivée.