

## TD 11

ÉQUATIONS  
DIFFÉRENTIELLES  
LINÉAIRES

## Premier ordre

**Exercice 11.1.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbf{R}$ .

- |                                |                                |                               |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1. $(E_1) : y' - 3y = 2;$      | 2. $(E_2) : y' - 3t^2y = t^2;$ | 3. $(E_3) : y' + ty = t^3;$   |
| 4. $(E_4) : y' + 2y = e^{2t};$ | 5. $(E_5) : y' - 5y = e^{5t};$ | 6. $(E_6) : y' - y = \sin t.$ |

**Indication 11.1.** Dans cette exercice, la méthode de variation de la constante n'est pas obligatoire.

- Il y a une solution évidente.
- Idem.
- Vous pouvez chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.
- Vous pouvez chercher une solution sous la forme  $y : t \mapsto ae^{2t}$ , où  $a \in \mathbf{R}$  est à déterminer.
- Vous pouvez chercher une solution sous la forme  $y : t \mapsto ate^{5t}$ , où  $a \in \mathbf{R}$  est à déterminer.
- Vous pouvez chercher une solution sous la forme  $y : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$ , où  $a, b \in \mathbf{R}$  sont à déterminer.

**Exercice 11.2.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes sur les intervalles  $I$  indiqués.

- |                                                                                             |                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1. $(E_1) : y' - 3y = e^{2x}$ sur $I = \mathbf{R};$                                         | 2. $(E_2) : xy' + 2y = 0$ sur $I = \mathbf{R}_+^*;$            |
| 3. $(E_3) : \sqrt{1-x^2}y' - y = 1$ sur $I = ]-1; 1[;$                                      | 4. $(E_4) : (x^2 - 1)y' - xy = 1 + x - x^2$ sur $I = ]-1; 1[;$ |
| 5. $(E_5) : y' - y \tan x = \frac{1}{\cos(x)^3}$ sur $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[;$ | 6. $(E_6) : y'x \ln x - y = 3 \ln x$ sur $I = ]0; 1[;$         |
| 7. $(E_7) : y' - 2y = \operatorname{sh}(x)$ sur $I = \mathbf{R};$                           | 8. $(E_8) : (x^2 - 1)y' + xy = x$ sur $I = ]1; +\infty[;$      |
| 9. $(E_9) : y' + y \tan x = \sin x$ sur $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[;$              | 10. $(E_{10}) : (1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $I = \mathbf{R}.$   |

**Indication 11.2.** 1. Méthode standard.

- Très rapide puisque l'équation est homogène.
- Méthode standard. Vous pouvez trouver une solution évidente au lieu d'appliquer la méthode de variation de la constante.
- Méthode standard. La primitive obtenue quand on applique la méthode de variation de la constante pourra être déterminée en remarquant que pour tout  $x \in ]-1; 1[$ ,

$$\frac{1+x-x^2}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x(1-x^2)^{-3/2}.$$

- Méthode standard.
- Méthode standard : attention, si  $u$  est dérivable et ne s'annule pas, une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln(|u|)$  (attention à ne pas oublier les valeurs absolues et à faire attention avant de les enlever!).
- Méthode standard.
- Il y a une solution évidente.

9. Méthode standard.

10. Méthode standard.

**Exercice 11.3.** On considère la fonction  $f : t \mapsto \ln \left( \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}} \right)$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur  $] -1 ; 1[$ . Expliciter  $f'(t)$  pour tout  $t \in ] -1 ; 1[$ .
2. Soit l'équation différentielle d'inconnue  $x$

$$(E) : \quad x' - \frac{x}{t-1} = \frac{2t}{1+t+t^2+t^3}.$$

(a) Résoudre  $(E)$  sur  $] -1 ; 1[$ .

(b) Déterminer la solution  $g$  de  $(E)$  sur  $] -1 ; 1[$  telle que  $g(0) = 1$ .

**Indication 11.3.** 1. Rien de particulier.

2. (a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 : la méthode est dans le cours.

(b) Idem.

**Exercice 11.4.** 1. Déterminer une primitive sur  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$  de  $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ . On pourra faire le changement de variable  $u = \sin(t)$ .

2. En déduire l'unique solution sur  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$  du problème de Cauchy :

$$y' - y \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad y(0) = 1.$$

**Indication 11.4.** Pas de difficulté particulière, les méthodes sont toutes standards.

**Exercice 11.5.** Déterminer une fonction à valeurs strictement positives solution sur  $\mathbf{R}_+^*$  de l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy' + y = -y^2 \ln(x).$$

On pourra commencer par faire une analyse et poser  $u = \frac{1}{y}$ .

**Indication 11.5.** La phase d'analyse n'est pas trop difficile : on se ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre après le changement de variable. Pour déterminer une primitive de  $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ , vous pouvez faire une IPP.

Dans la phase d'analyse, il faut déjà trouver des valeurs pour lesquelles  $x \mapsto -\ln(x) - 1 + Cx$  la fonction est à valeurs strictement positives. Ensuite, il reste à vérifier que la fonction trouvée dans la phase d'analyse est bien solution.

**Exercice 11.6.** On emprunte un capital  $S > 0$  sur une durée  $T > 0$ , au taux d'intérêt  $\tau > 0$ . Le remboursement est linéaire, progressif ou dégressif, c'est à dire que le remboursement par unité de temps est de la forme  $\rho(t) = at + R$  avec  $a \in \mathbf{R}$  et  $R > 0$ .

1. En supposant l'unité de temps petite devant  $T$ , montrer que le capital restant dû à l'instant  $t$  (que l'on notera  $y(t)$ ) vérifie l'équation différentielle

$$y' - \tau y + \rho = 0.$$

2. Résoudre cette équation et trouver la relation qui lie  $R$  et  $a$ . Déterminer la valeur de  $R$  pour que les remboursements par unité de temps soient constants.

**Indication 11.6.** 1. Il faut se placer à un instant  $t$  et étudier l'évolution sur un petit instant  $dt$ .

- Quels sont les intérêts ajoutés entre  $t$  et  $t + dt$  ?
- Combien rembourse-t-on entre  $t$  et  $t + dt$  ?

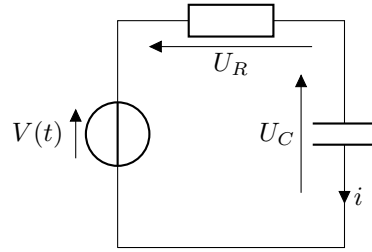
Une fois la relation obtenue, il faut faire tendre  $dt$  vers 0.

2. Pour la résolution, vous pouvez chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Ensuite, l'énoncé assure que  $f(0) = S$  et  $f(T) = 0$ , ce qui permet de trouver une relation entre  $R$  et  $S$ . Pour que les remboursements soient constants, il faut que  $a = 0$ , ce qui permet de simplifier la relation obtenue (solution :

$$R = \frac{\tau S e^{\tau T}}{e^{\tau T} - 1}.$$

**Exercice 11.7.**

Un circuit électrique se compose en série d'un condensateur de capacité  $C$  et d'une résistance  $R$ , alimentés par un générateur de force électromotrice  $V$ . On note  $Q(t)$  la charge du condensateur et  $I(t)$  l'intensité du courant au cours du temps  $t$ .



1. Montrer que  $t \mapsto Q(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

et résoudre celle-ci sachant que la charge initiale du condensateur est nulle et  $V$  est constante.

2. Montrer que  $t \mapsto I(t)$  vérifie l'équation

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

et calculer  $I(t)$  sachant qu'à l'instant  $t = 0$  l'intensité du courant vaut  $I_0$  et que  $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ .

**Indication 11.7.** 1. Il faut ouvrir le cours de physique ☺ On a les relations suivantes pour tout  $t \geq 0$

$$U_R(t) = RI(t)$$

$$Q(t) = CU_C(t)$$

De plus, la loi des mailles est utile. Enfin, on rappelle que l'intensité est la dérivée de la charge électrique. La résolution de l'équation différentielle n'est pas compliquée.

2. Il faut dériver la relation suivante, normalement obtenue à la question 1., et utiliser que l'intensité est la dérivée de la charge électrique.

$$(E_1) : V(t) = \frac{Q(t)}{C} + RI(t).$$

Pour trouver une solution particulière, vous pouvez passer par les complexes et considérer :

$$(E_{2,C}) : \frac{\omega V_0}{R} e^{i\omega t} = \frac{I(t)}{RC} + I'(t)$$

puis chercher une solution de la forme  $f : t \mapsto \alpha e^{i\omega t}$ , où  $\alpha \in \mathbf{R}$  est à déterminer.

## Second ordre

**Exercice 11.8.** Résoudre sur  $\mathbf{R}$  les équations différentielles suivantes.

1.  $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 0;$

2.  $(E_2) : y'' - 3y' = 0;$

3.  $(E_3) : y'' + 4y' + 4y = 0;$

4.  $(E_4) : y'' - 2y' + 2y = 0.$

**Indication 11.8.** Il s'agit d'appliquer des formules du cours, rien de plus.

**Exercice 11.9.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes sur  $\mathbf{R}$ .

1.  $(E_1) : y'' - 3y' - 18y = e^{4x};$

2.  $(E_2) : y'' + 2y' - 8y = e^{2x};$

3.  $(E_3) : y'' - 10y' + 41y = \sin(x);$

4.  $(E_4) : y'' + 4y = e^{2x} \cos(x);$

5.  $(E_5) : y'' - 2y' + 5y = \cos(2x);$

6.  $(E_6) : y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} + 1;$

7.  $(E_7) : y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x) + 3;$

8.  $(E_8) : y'' - y = \operatorname{sh}(x).$

**Indication 11.9.** 1. Méthode standard.

2. Méthode standard.
3. Passage par les complexes pour la solution particulière.
4. Idem.
5. Idem.
6. Principe de superposition des solutions.
7. Principe de superposition des solutions et passage dans les complexes.
8. Principe de superposition des solutions.

**Exercice 11.10.** Déterminer une équation différentielle linéaire du second degré ayant pour ensemble de solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto (A \cos(x) + B \sin(x))e^{-5x} + 3 \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

**Indication 11.10.** Quelles doivent être les racines du polynôme caractéristique ? Cela permet d'obtenir une équation homogène associée à celle cherchée. Il reste à trouver un second membre, qu'on pourra choisir constant.

**Exercice 11.11.** 1. Montrer que l'équation différentielle  $y'' + y = 3x^2$  admet une solution de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ .

2. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy

$$y'' + y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

**Indication 11.11.** 1. Méthode de résolution standard, avec même une indication dans l'énoncé !

2. Standard.

**Exercice 11.12.** On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (1 + e^x)^2 y'' - 2e^x(1 + e^x)y' - (3e^x + 1)y = 0.$$

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  deux fois dérivable. On considère la fonction  $g : x \mapsto \frac{f(x)}{1 + e^x}$ .

1. Après avoir justifié rapidement que  $g$  est deux fois dérivable, exprimer pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  puis  $(1 + e^x)^2 f''(x) - 2e^x(1 + e^x)f'(x) - (3e^x + 1)f(x)$  en fonction de  $g(x)$ ,  $g'(x)$  et  $g''(x)$ .
2. Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si, et seulement si  $g$  est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants que l'on note  $(F)$ .
3. Résoudre  $(F)$  puis  $(E)$ .

**Indication 11.12.** 1. Rien de particulier.

2. Il faut, comme le demande l'énoncé, raisonner par équivalences.

3.  $(F)$  est linéaire, donc la méthode est dans le cours. Les questions précédentes permettent de déduire les solutions de  $(E)$  de celles de  $(F)$ .

**Exercice 11.13.** Le but de cet exercice est la résolution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' + ty' - y = t + \sqrt{t^2 + 1}. \quad (E)$$

1. Démontrer que pour tous nombres réels  $x$  et  $t$ ,

$$\operatorname{sh}(x) = t \iff x = \ln \left( t + \sqrt{t^2 + 1} \right).$$

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , deux fois dérivable. On introduit la fonction :

$$\begin{array}{l} z : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto f(\operatorname{sh}(x)) \end{array}$$

(a) Montrer que  $z$  est deux fois dérivable sur  $\mathbf{R}$  et exprimer  $z'$  et  $z''$  à l'aide de  $f'$  et  $f''$ .

(b) Soit  $t \in \mathbf{R}$ . Posons  $t = \operatorname{sh}(x)$ . Montrer que

$$(t^2 + 1)f''(t) + tf'(t) - f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} \iff z''(x) - z(x) = e^x.$$

3. Résoudre sur  $\mathbf{R}$  l'équation différentielle  $z'' - z = e^x$ .

4. Conclure.

**Indication 11.13.** 1. Classique : on repasse à la forme exponentielle, on fait un changement de variable (ou on est plus malin et on fait apparaître un carré directement) puis on trouve deux valeurs pour  $e^x$  : avec une étude de signe de ces deux valeurs, on conclure que  $x$  ne peut prendre qu'une seule valeur.

2. (a) Rien à signaler.

(b) Il faut raisonner par équivalences.

3. Standard.

4. Vous pouvez faire une analyse synthèse (raisonner directement par équivalences est un peu pénible à rédiger) et utiliser les questions précédentes.

**Exercice 11.14.** 1. Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$

sur  $\mathbf{R}_+^*$  en effectuant le changement de variable  $t = \ln x$ .

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$$

sur  $\mathbf{R}$  en effectuant le changement de variable  $t = \operatorname{Arctan}(x)$ .

**Indication 11.14.** 1. Si  $y : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction deux fois dérivable fixée, vous pouvez poser  $z : t \mapsto y(e^t)$ . Il s'agit ensuite de montrer que  $x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = (x+1)^2$  équivaut à une équation différentielle linéaire vérifiée par  $z(t)$ . Il faut résoudre cette équation pour déterminer  $z(t)$ , puis on en déduit  $y(x) = z(\ln(x))$ .

2. Même démarche.

**Exercice 11.15.** Soit  $(E)$  l'équation  $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$ .

1. Montrer que si  $(E)$  admet une solution polynomiale de degré 2, alors elle est nécessairement de degré deux.

2. Trouver une solution polynomiale non nulle  $p$  de  $(E)$ .

3. Justifier qu'une fonction  $y$  deux fois dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  peut s'écrire sous la forme  $y = p \times z$ , où  $z$  est une fonction deux fois dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

4. Montrer qu'une fonction  $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  deux fois dérivable est solution de  $(E)$  si et seulement si la fonction  $Z = z'$  (où  $z$  est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un  $(E')$  à préciser.

5. Résoudre  $(E)$ .

**Indication 11.15.** 1. Il faut introduire une fonction polynomiale  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  quelconque, l'injecter dans  $(E)$  et obtenir une équation vérifiée par  $n$ , donc 2 est la solution.

2. D'après la question précédente, on peut choisir comme solution particulière  $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ . Il faut injecter  $p$  dans  $(E)$  jusqu'à obtenir une égalité de polynôme ; on identifie les coefficients pour obtenir un système d'équations avec  $a, b, c$ .

3. Il faut exprimer  $z$  en fonction de  $p$ .

4. Rien de particulier.

5. On résout l'équation obtenue avant pour trouver  $Z$ . Pour en déduire  $z$ , il faut primitiver l'expression obtenue. On pourra remarquer que

$$\frac{1}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t^2 + 1 - t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{t^2}{t^2 + 1}.$$

Pour déterminer une primitive de  $t \mapsto \frac{t^2}{t^2 + 1}$ , on pourra faire une IPP.

**Exercice 11.16 (Oscillation d'un ressort).** Nous allons décrire le mouvement d'une masse  $m$  fixée à l'extrémité d'un ressort (en position verticale) de raideur  $k$  qu'on étire d'une longueur  $y_0$  et qu'on lâche. On repère la position de la masse par son ordonnée  $y(t)$  sur un axe vertical orienté vers le haut et dont l'origine est la position d'équilibre du ressort avec la masse à son extrémité.

1. On suppose dans cette question qu'il n'y a pas de force de frottement. Montrer que  $y(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$my'' + ky = 0$$

et la résoudre. À quel type de mouvement a-t-on affaire ?

2. On suppose maintenant que la masse est plongée dans un liquide qui provoque une force de frottement opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse, valant  $-cy'$ . Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de la masse est

$$my'' + cy' + ky = 0$$

et la résoudre en distinguant trois cas selon la valeur de  $c^2 - 4km$ . À quel type de mouvement a-t-on affaire dans chacun des cas ?

**Indication 11.16.** 1. Un célèbre principe de physique donne l'équation directement. La résolution est simple.  
2. Idem.

**Exercice 11.17 (Oscillations forcées ou pourquoi interdit-on de défiler au pas sur un pont).** Un bloc de masse  $m$ , attaché à un ressort de raideur  $k$ , est soumis à une force extérieure  $\vec{F}$  s'exerçant dans l'axe du ressort et dont l'intensité au temps  $t$  est donnée par  $F(t) = F \sin(\alpha t)$  où  $F$  et  $\alpha$  sont des nombres réels positifs.

1. Justifier que le déplacement  $y(t)$  du bloc au temps  $t$  satisfait l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \frac{F}{m} \sin(\alpha t)$$

où  $\omega$  est une constante strictement positive que l'on exprimera en fonction des données.

2. Résoudre l'équation différentielle. Que se passe-t-il si la valeur de  $\alpha$  est proche de  $\omega$  ?

**Indication 11.17.** 1. Il faut appliquer un célèbre principe physique.  
2. Standard.

**Exercice 11.18.** Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbf{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + f'(-x) = \sin(2x).$$

On pourra raisonner par analyse-synthèse en commençant par montrer que de telles applications sont deux fois dérivables sur  $\mathbf{R}$ .

**Indication 11.18.** Vous pouvez faire une analyse synthèse. Dans la phase d'analyse, vous pouvez commencer par montrer que  $f$  est deux fois dérivables, trouver une expression de  $f''$  et montrer que  $f$  vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre. Il reste à la résoudre (le principe de superposition peut être utile) pour achever cette phase.

**Exercice 11.19.** Soit  $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Le but de cet exercice est de trouver les solutions définies sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  de l'équation différentielle :

$$y'' + y = f$$

vérifiant  $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . On introduit pour cela la fonction

$$\begin{aligned} F : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto -\cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + \sin(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) \cos(t) dt \end{aligned}$$

Montrer que  $F$  est deux fois dérivable. Exprimer  $F + F''$  en fonction de  $f$ , puis conclure.

**Indication 11.19.** Les fonctions  $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(t) dt$  et  $x \mapsto \int_{\pi/2}^x f(t) \cos(t) dt$  sont des primitives, donc on connaît leur dérivée! Ensuite, il faut trouver l'ensemble des solutions de l'équation différentielle obtenue, puis enfin utiliser  $F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  pour voir les contraintes que doivent vérifier les paramètres dans l'ensemble des solutions.  
.....

**Exercice 11.20.** Déterminer les applications  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

**Indication 11.20.** Vous pouvez faire une analyse synthèse. Pour la phase d'analyse, si  $f$  désigne une solution fixée, vous pouvez introduire  $g : x \mapsto f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt$  et calculer  $g''(x)$ . On peut en déduire que  $f$  vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre, qu'il faut résoudre pour achever la phase d'analyse.

Dans la phase de synthèse, il ne doit rester qu'une solution à la fin! Notons  $f_{a,b}$  une solution obtenue dans la phase d'analyse (où  $a, b$  sont des paramètres; il doit y avoir 2 cas vous avez résolu une équation linéaire du second ordre). En évaluant la relation proposée en une valeur bien choisie, vous pouvez obtenir rapidement la valeur d'un paramètre. Ensuite, vous pouvez introduire

$$g_{a,b} : x \mapsto f_{a,b}(x) + \int_0^x (x-t)f_{a,b}(t) dt.$$

et dériver cette fonction pour en déduire la valeur de l'autre paramètre. Il reste à vérifier que la solution restante est effectivement solution!