TD 10 — Primitives et intégrales

Calcul de primitives « simples »

Exercice 10.1. Calculez une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

Cet exercice ne nécessite ni intégration par parties, ni changement de variable.

1. $f_1 : t \longmapsto 2t^2 + 3t + 1$ sur $\mathbf{R}$;

2. $f_2 : t \longmapsto (t+1)\sqrt{t}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

3. $f_3 : t \longmapsto \dfrac{(1+t)^2}{\sqrt{t}}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

4. $f_4 : t \longmapsto \sin(t)\exp(\cos(t)+1/2)$ sur $\mathbf{R}$;

5. $f_5 : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $]0\,;\,1[$ puis $]1\,;\,+\infty[$;

6. $f_6 : t \longmapsto \sin^4(t)$ sur $\mathbf{R}$;

7. $f_7 : t \longmapsto \cos^3(t)\sin(t)$ sur $\mathbf{R}$;

8. $f_8 : t \longmapsto \cos(3t)\sin(2t)$ sur $\mathbf{R}$;

9. $f_9 : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{1-\mathrm{e}^t}}$ sur $]-\infty\,;\,0[$;

10. $f_{10} : t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbf{R}$;

11. $f_{11} : t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+(\ln(t))^2)}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

12. $f_{12} : t \longmapsto \exp(3t)\cos(2t)$ sur $\mathbf{R}$;

13. $f_{13} : x \longmapsto \dfrac{x}{2x^2+4x+9}$ sur $\mathbf{R}$;

14. $f_{14} : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ sur $\mathbf{R}$;

15. $f_{15} : t \longmapsto \dfrac{2t+3}{t^2-5t+6}$ sur $]2\,;\,3[$;

16. $f_{16} : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+6x+9}$ sur $]-3;+\infty[$;

17. $f_{17} : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2+x+1}$ sur $\mathbf{R}$;

18. $f_{18} : x \longmapsto \dfrac{x^4}{x^2-4}$ sur $]-\infty\,;\,-2[$;

19. $f_{19} : x \longmapsto \dfrac{3x^3+1}{x^2+2x+1}$ sur $]-\infty\,;\,1[$;

20. $f_{20} : x \longmapsto \dfrac{x^3-3x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbf{R}$.

Indication 10.1. **1.** Somme de primitives usuelles.

2. Somme de primitives usuelles (écrire $\sqrt{t} = t^{1/2}$ pour mieux les reconnaître).
3. Idem, en simplifiant bien avant de chercher les primitives.
4. Primitive usuelle.
5. Primitive usuelle.
6. Linéariser pour commencer.
7. Primitive usuelle.
8. Linéariser.
9. Primitive usuelle.
10. Primitive usuelle.
11. Primitive usuelle.
12. $\cos(2t) = \Re e(\mathrm{e}^{2it})$. Il faut chercher une primitive dans les complexes puis considérer la partie réelle à la fin.
13. Fonction rationnelle : la méthode est dans le cours.
14. Idem.
15. Idem.
16. Idem.

17. Idem.

18. $x^4 = (x^2+4)(x^2-4)+16$ puis simplifier. Ensuite, on reconnaît une fonction rationnelle.

19. $3x^3+1 = 3(x-2)(x^2+2x+1)+9x+7$ puis simplifier.

20. Même astuce que pour les deux questions précédentes.

. . . .

Exercice 10.2. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1 : x \longmapsto x\sin(3x^2+1)$ sur $\mathbf{R}$;

2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{(x^3+3x+2)^3}$ sur $]0\,;+\infty[$;

3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$;

4. $f_4 : x \longmapsto \cos(x)(1+\sin(x))^3$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$;

5. $f_5 : x \longmapsto x^2\exp(x^3)$ sur $\mathbf{R}$;

6. $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$;

7. $f_7 : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ sur $]1\,;+\infty[$;

8. $f_8 : x \longmapsto \tan^2(x)+\sin^2(x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$;

9. $f_9 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ sur $\mathbf{R}$;

10. $f_{10} : x \longmapsto \cos^4(x)$ sur $\mathbf{R}$;

11. $f_{11} : x \longmapsto \dfrac{1}{3+x^2}$ sur $\mathbf{R}$;

12. $f_{12} : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x(-1-x)}}$ sur $]-1\,;0[$;

13. $f_{13} : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2+4x+6}$ sur $\mathbf{R}$;

14. $f_{14} : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ sur $\mathbf{R}$;

15. $f_{15} : x \longmapsto \sin(2x)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbf{R}$;

16. $f_{16} : x \longmapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$;

17. $f_{17} : x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$ sur $\mathbf{R}$:

18. $f_{18} : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$;

19. $f_{19} : x \longmapsto \cos^2(2x)\sin(3x)$ sur $\mathbf{R}$;

20. $f_{20} : x \longmapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)}}$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$;

21. $f_{21} : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+1}\cos^2(x)$ sur $\mathbf{R}$;

22. $f_{22} : x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)+1}}$ sur $\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;+\infty\right[$;

23. $f_{23} : x \longmapsto \dfrac{3x+4}{1+x^2}$ sur $\mathbf{R}$;

24. $f_{24} : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2-5x+6}$ sur $]2\,;3[$.

Indication 10.2. **1.** Primitive usuelle.

2. Primitive usuelle.

3. Primitive usuelle.

4. Primitive usuelle.

5. Primitive usuelle.

6. Primitive usuelle.

7. Primitive usuelle.

8. Il faut utiliser des formules trigonométriques pour simplifier avant de commencer les calculs.

9. Primitive usuelle.

10. Linéariser.

11. Fonction rationnelle.

12. Écrire l'intégrande sous la forme $\dfrac{1}{\sqrt{1-\ldots}}$ et reconnaître une primitive usuelle.

13. Fonction rationnelle.

14. Forme exponentielle, on simplifie et on reconnaît une primitive usuelle.

15. On passe par les complexes.

16. Primitive usuelle.

17. Formule de trigonométrie puis primitive usuelle.
18. Primitive usuelle.
19. Linéariser.
20. Primitive usuelle.
21. Formule de trigonométrie, passage par les complexes.
22. Primitive usuelle.
23. Primitives usuelles.
24. Fonction rationnelle.

Exercice 10.3. Calculer simultanément les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{\sin(t)+\cos(t)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{\sin(t)+\cos(t)},$$

en calculant leur somme et leur différence.

Indication 10.3. Écrire $I+J$ et $I-J$, ces intégrales sont usuelles. Ensuite, vous pouvez résoudre un système pour déterminer I et J.

Exercice 10.4. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$.

1. Déterminer une primitive F de f sur $]0\,;\pi[$.
2. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, déterminer une primitive de f sur $]k\pi\,;\pi+k\pi[$.

Indication 10.4.
1. Formule de trigonométrie pour tout exprimer en fonction de $\tan(x/2)$ puis primitive usuelle.
2. Il faut utiliser l'imparité et la périodicité de f pour conclure.

Intégration par parties

Exercice 10.5. En intégrant par parties, calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$;
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$;
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$;
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$;
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)\,\mathrm{d}t}$;
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t$;
7. $I_7 = \displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 t^2\exp(t)\,\mathrm{d}t$;
9. $I_9 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$;
10. $I_{10} = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$;
11. $I_{11} = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$;
12. $I_{12} = \displaystyle\int_0^1 (t+1)\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication 10.5. Parfois il faut faire plusieurs IPP.

Exercice 10.6. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$. Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $g_1 : t \longmapsto t^\alpha \ln(t)$ sur $]0\,;+\infty[$;
2. $g_2 : t \longmapsto (t^2+t+1)\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur $\mathbf{R}$;
3. $g_3 : t \longmapsto (t^2+t)\sin(\alpha t)$ sur $\mathbf{R}$.

Indication 10.6. Pour la question **1.**, il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$. Pour les deux autres questions, il faut faire plusieurs IPP.

Exercice 10.7. Calculer la primitive sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction

$$f : t \longmapsto te^t \cos(2t).$$

Indication 10.7. Passage par les complexes puis IPP.

. . . .

Exercice 10.8. En intégrant deux fois par parties, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \int_1^{\exp(\pi)} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x.$$

Indication 10.8. Plusieurs IPP pour obtenir une équation vérifiée par I (dans la second IPP, I doit apparaît à nouveau). En résolvant cette équation, on en déduit I.

. . . .

Exercice 10.9 (*Intégrales de Wallis*). Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En effectuant une intégration par parties, montrer que
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
3. En déduire que pour tout entier naturel p, $I_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Indication 10.9.
1. Rien de particulier.
2. Une IPP suffit pour exprimer I_n en fonction de I_n et I_{n-2} (il faut utiliser une formule de trigonométrie pour simplifier $\cos^2$). Ensuite, on en déduit l'expression demandée.
3. Récurrence (les deux assertions doivent être montrées simultanément).

. . . .

Exercice 10.10. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose $I_{(p,q)} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star$, $I_{(p,q)} = \dfrac{q}{p+1} I_{(p+1,q-1)}$.
2. En déduire que pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, $I_{(p,q)} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
3. Démontrer enfin que pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Indication 10.10.
1. IPP.
2. Récurrence avec la question précédente.
3. Somme usuelle et linéarité de l'intégrale, puis on conclut avec une question précédente.

Changement de variable

. . . .

Exercice 10.11. Effectuer les changements de variable indiqués dans les intégrales suivantes. On ne demande pas de calculer l'intégrale obtenue.

1. $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{ch}(x^2-1)\,\mathrm{d}x \quad (x = t-1)$;
2. $\displaystyle\int_0^2 x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad (y = x^2)$;

3. $\displaystyle\int_1^4 \sin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t \quad (u=\sqrt{t})\,;$

4. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{\mathrm{ch}(u)}\,\mathrm{d}u \quad (x=\exp(u))\,;$

5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\exp(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad (x=\ln(u))\,;$

6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x \qquad (x=\cos(u))\,;$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \qquad (u=\sqrt{x+1})\,;$

8. $\displaystyle\int_{3/2}^{5/2} \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,\mathrm{d}x \qquad (x=2+\sin(t)).$

Indication 10.11. Rien à signaler, la méthode est dans le cours.

. . . .

Exercice 10.12. En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes.

$$I_1=\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } u=\sqrt{t}\,;$$

$$I_2=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } t=\cos(u)\,;$$

$$I_3=\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}} \qquad \text{en posant } u=\sqrt{t}\,;$$

$$I_4=\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{t(-t-2)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } u=t+1 \text{ puis } u=\cos(x)\,;$$

$$I_5=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \qquad \text{en posant } u=\mathrm{e}^t\,;$$

$$I_6=\int_{\frac12}^1 \sqrt{4t^2-4t+2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } u=2t-1 \text{ puis } u=\mathrm{sh}(x)\,;$$

$$I_7=\int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } t=\tan(u)\,;$$

$$I_8=\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x \qquad \text{en posant } x=\frac{\pi}{4}-u\,;$$

$$I_9=\int_0^{\mathrm{sh}(1)} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{en posant } u=\mathrm{sh}(x)\,;$$

$$I_{10}=\int_{-3}^{-4} \frac{x}{x^4-x^2-2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{en posant } u=x^2\,;$$

$$I_{11}=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } u=\mathrm{e}^t.$$

Indication 10.12. Il faut faire le changement de variable puis appliquer les méthodes habituelles de calcul d'intégrale (reconnaître une primitive usuelle, fonction rationnelle).
Pour la question **6.**, vous n'êtes pas obligé de détailler le caractère $\mathscr{C}^1$ du deuxième changement de variable. Vous pourrez aussi utiliser pour cette question que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x)^2=\mathrm{ch}(2x)+1$.
Pour la question **8.**, il faut retrouver I_8 après le changement de variable, ce qui fournit une équation vérifiée par I_8. En la résolvant, on peut conclure.

. . . .

Exercice 10.13. À l'aide de changements de variable, calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^2 \exp(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

Indication 10.13. Vous pouvez poser $u=\sqrt{x}$.

. . . .

Exercice 10.14. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la primitive sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$.

Indication 10.14. L'intégrale à chercher est dans le cours. Vous pouvez poser $u = \mathrm{e}^t$ comme changement de variable.

Exercice 10.15. **1.** Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x distinct de -7,

$$\frac{1}{(7+x)(1+x^2)} = \frac{a}{7+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. En posant $u = \tan(t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{7+\tan(t)}.$$

Indication 10.15. **1.** Vous pouvez faire une analyse pour déterminer a, b et c puis une synthèse.

2. Rien de particulier.

Exercice 10.16. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^\star$ de la fonction f définie par :

$$f(t) = \sin(\ln(t)).$$

Indication 10.16. Changement de variable puis la méthode est dans le cours pour déterminer l'intégrale !

Exercice 10.17. À l'aide du changement de variable $u = \cos(2t)$, déterminer une primitive sur $\left]0\,; \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\sin(t)\cos(t)}{(\tan(t))^2 + (\tan(t))^{-2}}.$$

Indication 10.17. Après le changement de variable, on est ramené à une fonction rationnelle. Vous pourrez remarquer que

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{-1-u^2+2}{1+u^2}.$$

Exercice 10.18. **1.** Déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^\star$ de la fonction ln.

2. À l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$, déterminer une primitive sur $\left]0\,; \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction f définie par

$$f(t) = \cos(t)\ln(\tan(t)).$$

Indication 10.18. **1.** IPP (dans le cours !).

2. $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, on obtient deux intégrales. Pour la première, changement de variable. Pour la seconde, IPP, décomposition en éléments simples. Les calculs sont assez longs.

Exercice 10.19. Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{3+\mathrm{ch}(x)}$, en précisant sur quel(s) intervalle(s) c'est une primitive.

Indication 10.19. Il faut transformer $\mathrm{ch}(t)$ à l'aide de l'écriture exponentielle pour faire le changement de variable. Ensuite on est ramené à une fonction rationnelle dont on sait trouver une primitive.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 10.20. L'objectif de cet exercice est de déterminer tous les triplets réels (α, β, γ) tels que, pour toute fonction polynomiale réelle P de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$$\int_2^4 P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4). \tag{10.1}$$

1. Supposons qu'il existe (α, β, γ) tel que tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie (10.1).

(a) Donner la valeur de $\displaystyle\int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x$, puis exprimer $\displaystyle\int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x$ en fonction de α, β et γ.

(b) Reprendre la question précédente avec $\displaystyle\int_2^4 x\,\mathrm{d}x$, puis avec $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{d}x$.

(c) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4\alpha+9\beta+16\gamma & = & 56/3 \\ 2\alpha+3\beta+4\gamma & = & 6 \\ \alpha+\beta+\gamma & = & 2 \end{array}\right.$.

2. Conclure.

Indication 10.20. **1.** **(a)** Il faut calculer $\displaystyle\int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x$ directement, puis avec la relation (10.1).

(b) Idem.

(c) On a un système de trois équations à trois inconnues à résoudre.

2. Il faut reconnaître un certain type de raisonnement, guidé par l'exercice.