

TD 9

ÉQUATIONS ET GÉOMÉTRIE
DANS LES COMPLEXES

Équations

Exercice 9.1. 1. Calculer les racines carrées de $-18i$, $1 - i$, $-\sqrt{3} + i$, $3 - 4i$, $-5 - 12i$ et $(1 + i)^5$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. Soit x un nombre réel. Déterminer les racines carrées de $4x + 2i(1 - x^2)$.

3. (a) Déterminer les racines cubiques de $4 + 4i\sqrt{3}$.

(b) Déterminer les racines quatrièmes de $\frac{\sqrt{3} + i}{i - \sqrt{3}}$.

(c) Déterminer les racines cinquièmes de $\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{\sqrt{3} - i}$.

Indication 9.1. Pour les questions 1. et 2., il faut utiliser la méthode pour trouver une racine sous forme algébrique. Pour la question 3., il faut repasser par la forme exponentielle avant de chercher les racines n -ièmes (ce qui revient à appliquer une formule du cours!).

Exercice 9.2. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z .

1. $(1 + i)z^2 + iz + (1 - i) = 0$;

2. $z^2 - (5 - 14i)z - (24 + 10i) = 0$;

3. $(1 + i)z^2 + (1 - i)z + 2(1 + i) = 0$;

4. $z^4 + (5i - 4)z^2 - 1 - 7i = 0$;

5. $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0$;

6. $1 + iz - z^2 - iz^3 = 0$.

Indication 9.2. Les ensembles de solutions sont les suivants :

1. $\left\{-1 - i; \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right\}$.

2. $\{-i; 2i\}$.

3. $\{1 + i; 2 - 3i\}$.

4. $\{-2i; 5 - 12i\}$.

5. $\left\{-2 + i; 2 - i; \sqrt[4]{2}e^{-\frac{i\pi}{8}}; \sqrt[4]{2}e^{\frac{7i\pi}{8}}\right\}$ (équation bicarrée).

6. $\{1; -1; i\}$ (racines évidentes).

Exercice 9.3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Résoudre sur $\mathbf{C}$ les équations suivantes d'inconnue z .

1. $(E_1) : z^3 + 1 = 0$;

2. $(E_2) : z^4 - i = 0$;

3. $(E_3) : z^8 + 1 = 0$;

4. $(E_4) : z^3 = -(2 + i)^3$;

5. $(E_5) : (z^2 + 1)^7 = (z + i)^{14}$;

6. $(E_6) : \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^{2n} = 1$.

Indication 9.3. On se ramène systématiquement à des problèmes de recherche de racine n -ième (la méthode pour les déterminer ensuite est dans le cours).

Exercice 9.4. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z .

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $3z^2 - 4z + 2 = 0$; | 2. $z^3 = 1$; | 3. $z^7 = -1$; |
| 4. $z^3 = \frac{1}{2} + i\sqrt{2}$; | 5. $z^2 = 1 + i$; | 6. $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$; |
| 7. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$; | 8. $z^2 + 2(1 - i)z + 8 - 2i = 0$; | 9. $z^4 - 3iz^2 + i - 3 = 0$; |
| 10. $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$; | 11. $z^2 + 3(i - 1)z + 2 - 3i = 0$; | 12. $(z^2 + 1)^n = 1 \quad (n \geq 1)$; |
| 13. $(z + 1)^n = z^n \quad (n \geq 1)$; | 14. $(\bar{z})^{n-1} = z \quad (n \geq 2)$; | 15. $z^2 - 2\sin(\alpha)z + 2(1 + \cos \alpha) = 0$; |
| 16. $z^3 - 2z^2 + 8z - 7 = 0$; | 17. $z^2 - (2 + i\alpha)z + 2 + i\alpha - \alpha = 0$; | 18. $(z^2 + 1)^n - (z - i)^{2n} = 0 \quad (n \geq 1)$. |

Indication 9.4. Mélange. Pour les équations du second degré, on calcule le discriminant et on applique les formules. Pour certains équations, un changement de variable pourra être utile. Il y a aussi des calculs de racine n -ièmes. Enfin, pour les équation de degré 3 avec un mélange de z^3 , z^2 , z et constante, il faut d'abord chercher une racine évidente z_0 , factoriser par $z - z_0$ et conclure.

Exercice 9.5. Déterminer le module de $1 + \sqrt[3]{2}j + \sqrt[3]{4}j^2$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Indication 9.5. Il faut écrire le nombre cherché comme somme géométrique et simplifier. La dernière étape prend un peu de temps!

Exercice 9.6. Soit ω un nombre complexe fixé. On considère l'équation du second degré

$$(E_\omega) : z^2 - (2 + i\omega)z + 2 + i\omega - \omega = 0.$$

1. Résoudre (E_ω) .
2. Pour quelle(s) valeur(s) de ω cette équation admet-elle deux racines complexes conjuguées?

Indication 9.6. 1. Rien à signaler.

2. Déjà il faut que $\Delta \neq 0$. Ensuite, si on note z_1 et z_2 les solutions obtenues précédemment, il faut « résoudre » $z_1 = \bar{z}_2$ pour trouver la contrainte sur ω demandée.

Exercice 9.7. On considère l'équation

$$(E) \quad z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1 + i)z - 5 = 0.$$

1. Montrer que l'équation admet une solution réelle x .
2. Montrer que l'équation admet une solution imaginaire pure w .
3. Déterminer des nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, on ait

$$z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1 + i)z - 5 = (z - x)(z - w)(z^2 + az + b)$$

4. Résoudre (E) .

Indication 9.7. 1. Le plus simple est de chercher une racine évidente. Si vous n'en trouvez pas, vous pouvez faire une analyse synthèse et introduire $x \in \mathbf{R}$ une racine.

$$x^4 - 4x^3 + 8x - 5 + i(-4x^3 + 12x^2 - 8x) = 0.$$

Ensuite on exploite qu'un complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles, ce qui fournit deux équations vérifiées par x . L'une d'elle est « facile » à résoudre et fournit des candidats solutions pour x , qu'il reste à tester ensuite.

2. Même idée, en introduisant iy une racine (où $y \in \mathbf{R}$).
3. Il faut se ramener à une égalité de polynôme et « deviner » les coefficients qui sont corrects.
4. Immédiat avec la question précédente.

Exercice 9.8. Soit n un entier naturel non nul. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue complexe z ,

$$z^n + 2(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z) + 1 = 0.$$

Indication 9.8. Vous pouvez vous ramener à deux sommes géométriques.

Exercice 9.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n -ième de l'unité.

Indication 9.9. La somme est une somme géométrique. Le produit peut être transformé en somme avec les règles opératoires sur exponentielle.

Exercice 9.10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants.

$$1. (A) : \begin{cases} ab = -24 - 10i \\ a + b = 5 - 14i, \end{cases} \quad 2. (B) : \begin{cases} uv = 1 - 8i \\ u^2 + v^2 = -2 - 16i. \end{cases}$$

Indication 9.10. Un résultat du cours permet de ramener ces systèmes à la recherche des racines de trinômes.

Exercice 9.11. On pose $u = e^{2i\pi/7}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. Calculer $S + T$ et ST . En déduire les valeurs de ces complexes.

2. Calculer $Z = \frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}$.

Indication 9.11. 1. Il faut utiliser que $1 + u + u^2 + \dots + u^6 = 0$ pour simplifier $S + T$ et ST (on trouve deux entiers). Ensuite, un résultat du cours permet de ramener la recherche de S et T à la recherche des racines d'un trinôme. On trouve deux candidats possibles pour S . L'étude du signe de $\Im m(S)$ permet de conclure. Une fois que S est connue, on a T aussi.

2. Rien de particulier, on met au même dénominateur et on simplifie toujours en utilisant $1 + u + u^2 + \dots + u^6 = 0$. On trouve un entier à la fin.

Géométrie avec les nombres complexes

Exercice 9.12. On considère l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$. Déterminer et représenter les ensembles suivants :

$$z \mapsto \frac{z+i}{z-1}$$

- $E = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid f(z) \in \mathbb{R}\};$
- $F = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid |f(z)| = 1\};$
- $G = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -i\} \mid \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} [2\pi]\right\}.$

Indication 9.12. Vous pouvez introduire $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et considérer M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, puis noter A le point d'affixe $-i$ et B le point d'affixe 1.

Exercice 9.13. 1. Donner l'écriture complexe des trois transformations suivantes : la rotation de centre O et de mesure d'angle $\frac{2\pi}{3}$, la rotation de centre i et de mesure d'angle $-\frac{3\pi}{4}$, l'homothétie de centre $1+i$ et de rapport 4.

- Quelle est l'image de $3i$ par la rotation de centre $1+i$ et de mesure d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- Déterminer la nature géométrique des applications suivantes : $z \mapsto iz + (1-3i)$ et $z \mapsto 3z + 6 - 2i$.

Indication 9.13. Soit le résultat est directement dans le cours, soit un exemple/exercice d'application du cours explique comment faire.

Exercice 9.14. Soit z un nombre complexe. On considère les points A , B et C d'affixes respectives z , z^2 et z^4 .

1. Pour quelles valeurs de z les points A et B sont-ils confondus ?
2. Pour quelles valeurs de z les points A , B et C sont-ils alignés ?

Indication 9.14. 1. Il faut traduire A et B confondus par une équation à résoudre.

2. Il faut donner une assertion équivalente à A , B et C alignés, puis chercher quand celle-ci est vraie.

Exercice 9.15. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note x et y les deux racines carrées complexes de z . Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, x, y forment un triangle rectangle en le point d'affixe z .

Indication 9.15. Notons X, Y, Z les points d'affixes respectives x, y, z . Expliquer d'abord pourquoi O est le milieu de $[XY]$. Ensuite, vous pouvez remarquer que XYZ est rectangle en Z si et seulement si $OZ = OX$ et montrer par équivalence que $|z| = 1$ (cela nécessite pas mal d'arguments!).

Exercice 9.16. On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Soit A, B et C trois points du plan de Cauchy, d'affixes respectives a, b et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si j ou j^2 est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Indication 9.16. ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}.$$

En transformant par équivalence cette égalité, vous pouvez obtenir l'assertion demandée. Idem si ABC est équilatéral indirect.

Exercice 9.17. Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$. On construit les points F et G de telle sorte que BCF et CDG soient des triangles équilatéraux extérieurs au parallélogramme. Montrer que AFG est équilatéral.

Indication 9.17. Notons $\omega = e^{i\pi/3}$, a, b, c, d, f, g les affixes respectives de A, B, C, D, F, G . Il faut traduire toutes les hypothèses (par exemple, dire que BCF est équilatéral entraîne que $\frac{f-b}{c-b} = \omega$). Il faut montrer que $\frac{f-a}{g-a} = \omega$ et $AG = AF$ par exemple pour conclure.

Exercice 9.18 (Théorème de Napoléon). Soit ABC un triangle du plan, sur les côtés duquel on construit extérieurement des triangles équilatéraux ABC' , BCA' et CAB' . Montrer que les centres de ces triangles sont les sommets d'un autre triangle équilatéral qui a même centre de gravité que le triangle ABC .

Indication 9.18. Notons A'', B'' et C'' les centres de $A'BC$, $AB'C$ et ABC' , d'affixes respectives a'', b'' et c'' . Si a, b et c désignent les affixes respectives de A, B et C , on a

$$a'' = \frac{a' + b + c}{3} \quad b'' = \frac{a + b' + c}{3}, \quad c'' = \frac{a + b + c'}{3}.$$

On utilise le résultat suivant, démontré dans un autre exercice :

$$A''B''C'' \text{ est équilatéral ssi } j \text{ et } j^2 \text{ sont les solutions de } a''z^2 + b''z + c'' = 0.$$

Exercice 9.19. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe du plan de Cauchy. Sur les côtés de ce quadrilatère, on construit extérieurement quatre carrés. On nomme P, Q, R et S les centres de ces carrés, de telle sorte que le quadrilatère $PQRS$ ne soit pas croisé. Démontrer que les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires et de même longueur.

Indication 9.19. Notons M, N, P et Q les centres des carrés de côtés respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On note m, n, p et q leurs affixes respectives, et a, b, c et d les affixes de A, B, C et D . Vous pouvez :

- traduire toutes les hypothèses, obtenir un système d'équation liant m, n, p, q, a, b, c, d puis en déduire m, n, p, q en fonction de a, b, c, d ;
- calculer $\frac{m-p}{q-n}$ et conclure !

Exercice 9.20. 1. **Théorème de l'angle au centre.** Soit O, A, B et M quatre points distincts du plan et Γ le cercle de centre O passant par A et B . Alors,

$$M \in \Gamma \iff \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) \equiv 2 \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) [2\pi].$$

2. **Théorème de l'angle inscrit.** Soit A, B, M trois points distincts situés sur un même cercle Γ , soit N un point du plan. Alors,

$$N \in \Gamma \iff \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{NA}}, \widehat{\overrightarrow{NB}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) [\pi]$$

3. Soit a, b, c et d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On définit leur **birapport** par :

$$[a, b, c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

Montrer que le birapport $[a, b, c, d]$ est réel si et seulement si les points A, B, C et D , d'affixes respectives a, b, c et d , sont alignés ou cocycliques.

Indication 9.20. 1. Le mieux est de se placer dans un repère de centre O de telle sorte que $OA = 1$. Notons a, b, z les affixes de A, B et M . On a $|a| = 1, |b| = 1$. On note α (resp. β) un argument de a (resp. b) et $\theta = \beta - \alpha$ un argument de $\frac{b}{a}$. Vous pouvez remarquer que

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) \equiv 2 \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) [2\pi] \iff \exists k \in \mathbf{R}, \quad \frac{b-z}{a-z} = ke^{i\theta/2}.$$

et montrer plutôt cette nouvelle équivalence, par double implication.

- Sens direct : si $M \in \Gamma$, il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{it}$. Il reste à simplifier $\frac{b-z}{a-z}$ pour l'écrire sous la forme $ke^{i\theta/2}$.
 - Sens réciproque : il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{b-z}{a-z} = ke^{i\theta/2}$. Il faut montrer que $|z| = 1$. Vous pouvez commencer par déterminer une expression de z en fonction de a, b et θ puis en déduire que $|z| = 1$.
2. Conséquence presque immédiate du point précédent (il n'y a pas besoin de refaire de calcul!).
3. Vous pouvez commencer par montrer que

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbf{R} \iff \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA}}, \widehat{\overrightarrow{CA}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DB}}, \widehat{\overrightarrow{CB}}) [\pi].$$

Ensuite vous pouvez distinguer des cas suivant que A, C et D sont alignés ou non (dans ce dernier cas, il existe un cercle Γ circonscrit à A, C et D et on est dans le cas d'un théorème précédemment démontré!).