TD 8 Bijections réelles et fonctions circulaires réciproques

Bijections réelles

Exercice 8.1. Soit $f : [\mathrm{e}\,;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ dans un intervalle J à préciser. Soit g l'application réciproque de cette bijection.
2. Étudier la continuité de g et tracer son tableau de variations. Que peut-on dire de la courbe de g (par rapport à la courbe de f) ?

Indication 8.1.
1. Il faut utiliser un théorème du cours.
2. La continuité s'obtient via le théorème utilisé à la question **1.**, ainsi que les variations de g.

Exercice 8.2. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. La fonction f est-elle bijective ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
   Soit $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} [-1\,;+\infty[& \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}$ et $\widetilde{f}^{-1}$ la bijection réciproque de $\widetilde{f}$.
4. (a) Préciser les variations de $(\widetilde{f})^{-1}$ et ses limites aux bornes de son ensemble de départ.
   (b) Calculer $\widetilde{f}^{-1}(-1/\mathrm{e})$, $\widetilde{f}^{-1}(0)$, et $\widetilde{f}^{-1}(\mathrm{e})$.
   (c) Déterminer le domaine D sur lequel la fonction $\widetilde{f}^{-1}$ est dérivable. Montrer que
   $$\forall y \in D, \quad (\widetilde{f}^{-1})'(y) = \frac{1}{y + \exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)}.$$
   Calculer $(\widetilde{f}^{-1})'(0)$ et $(\widetilde{f}^{-1})'(\mathrm{e})$.

Indication 8.2.
1. Rien de particulier.
2. La réponse est non. Pour cela, vous avez le choix : soit vous donner un réel de $\mathbf{R}$ qui n'a pas d'antécédent, sous vous en donnez un qui a au moins deux antécédents.
3. Il faut utiliser un théorème du cours.
4. (a) Voir cours.
   (b) Il faut résoudre certaines équations.
   (c) Théorème du cours.

Exercice 8.3. Considérons la fonction $f : x \longmapsto x\ln x$ définie sur $\mathbf{R}_+^\star$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\right[$ dans un ensemble à préciser. On note g la fonction réciproque de cette bijection.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction g. On note I ce domaine.

3. Justifier que g est deux fois dérivable sur I.
4. Calculer $g(\mathrm{e})$, $g'(\mathrm{e})$ et $g''(\mathrm{e})$.

Indication 8.3. 1. Il faut savoir faire !

2. Le domaine de définition de g est le domaine d'arrivée de la fonction bijective trouvée avant.
3. La dérivabilité et l'expression de la dérivée sont dans le cours. Puisqu'on a la dérivée, il est facile de voir qu'elle est dérivable et de la dériver à nouveau.
4. Pour $g(\mathrm{e})$, il faut résoudre une équation. Pour les autres réels, on utilise la question précédente.

Fonctions circulaires réciproques - formules

Exercice 8.4. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = \operatorname{Arctan}(-1)$;
2. $B = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)$;
3. $C = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$;
4. $D = \operatorname{Arctan}(-\sqrt{3})$;
5. $E = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
6. $F = \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
7. $G = \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{8\pi}{5}\right)$;
8. $H = \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$;
9. $I = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;
10. $J = \operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$;
11. $K = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
12. $L = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
13. $M = \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$;
14. $N = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{-195\pi}{6}\right)$;
15. $O = \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{167\pi}{3}\right)$;
16. $P = \operatorname{Arctan}\left(\sin\frac{-\pi}{2}\right)$.

Indication 8.4. Pour la première question, il faut trouver un angle $\theta \in \left]-\pi/2\,;\,\pi/2\right[$ tel que $\tan(\theta) = 1/\sqrt{3}$, de sorte qu'on puisse simplifier $\operatorname{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$ (on rappelle que cette formule n'est valide que si $\theta \in \left]-\pi/2\,;\,\pi/2\right[$). Les autres questions se traitent de manière similaire.

Exercice 8.5. Simplifier, pour les réels x pour lesquels elles ont un sens, les expressions suivantes.

1. $\operatorname{Arccos}(\cos x)$;
2. $\cos(\operatorname{Arccos} x)$;
3. $\sin(\operatorname{Arccos} x)$;
4. $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$;
5. $\tan(2\operatorname{Arcsin} x)$;
6. $\sin(2\operatorname{Arctan} x)$.

Indication 8.5. Les premières sont dans le cours ou presque (attention au domaine de validité des formules utilisées !).

4. Vous connaissez $\sin(\operatorname{Arcsin}(x))$ et $\cos(\operatorname{Arcsin}(x))$.
5. Il faut utiliser la formule de duplication de tangente pour commencer et la question précédente.
6. Il y a une formule de duplication qui ne fait intervenir que des tangentes. Pratique !

Exercice 8.6. Simplifier les réels suivants.

1. $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$;
2. $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8$;
3. $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$.

Indication 8.6. Pour la question **1.**, si on note $\alpha = \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$, on peut calculer $\tan(\alpha)$ avec une formule d'addition, puis en déduire α à π-près (on a donc une infinité de choix pour α). Il reste à encadrer $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$ pour savoir quel est le bon choix pour α.
Les autres questions sont similaires, avec un peu plus de calcul.

Exercice 8.7. 1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Monter que $\operatorname{Arctan}(x)$ est un argument du nombre complexe $1 + ix$.

2. En déduire la valeur de $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$.

Indication 8.7. **1.** Notons α l'argument de $1+ix$ dans $[0\,;\,2\pi[$. Que vaut $\tan(\alpha)$? Qu'en déduire pour α ?

2. Vous pouvez chercher l'argument d'un produit de nombres complexes (voir la question précédente pour savoir quels nombres complexes sont pertinents).

Exercice 8.8. Simplifier les réels suivants.

1. $A = \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) + \operatorname{Arctan}(2+\sqrt{3})$;

2. $B = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right)$.

Indication 8.8. Pour la première question, vous pouvez déjà cherché $y = \tan(\operatorname{Arctan}(3) + \operatorname{Arctan}(2+\sqrt{3})$, puis $\tan(\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}(3)+\operatorname{Arctan}(2+\sqrt{3})$ donc en résolvant une équation trigonométrique (très simple !) on obtient une infinité de choix pour l'angle A. On choisit le bon en encadrant A.
Méthode similaire pour B.

Exercice 8.9. On pose :

$$A = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right).$$

1. Montrer que le nombre A est bien défini puis montrer que $A \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$.

2. Montrer que $\sin(A) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, puis calculer la valeur de $\cos(2A)$.

3. Démontrer l'égalité $\cos(4A) = \sin(A)$.

4. En déduire la valeur de A.

Indication 8.9. **1.** Il faut encadrer l'expression dans Arccos.

2. Il faut exprimer $\sin^2$ à l'aide de $\cos^2$ pour la première partie. La deuxième est immédiate avec une formule de trigonométrie.

3. Même idée qu'avant.

4. Il faut résoudre l'équation de **3.** ce qui fournit une infinité de choix pour A. On trouve le bon avec la question **1.**.

Exercice 8.10. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. Écrire une relation analogue sur $\mathbf{R}_-^\star$.

Indication 8.10. On peut par exemple montrer que la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x)$ est constante sur $\mathbf{R}_+^\star$, puis obtenir la valeur de cette constante avec un calcul de limite. Idem sur $\mathbf{R}_-^\star$, sauf que la constante ne sera pas la même !

Exercice 8.11. Montrer les relations suivantes sur des intervalles que l'on précisera.

1. $\operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$;

2. $2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$.

Indication 8.11. **1.** Vous pouvez étudier $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$ et montrer que cette fonction est constante. Ensuite, il faut trouver la constante !

2. Même idée !

Exercice 8.12. Trouver une expression plus simple de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\operatorname{Arctan}(x)$ sur son ensemble de définition.

Indication 8.12. Vous pouvez montrer que f est constante sur $\mathbf{R}_+^\star$. Sur $\mathbf{R}_-^\star$, il faut trouver $f'(x)$, puis en déduire une expression de $f(x)$ (attention, il y a une constante à déterminer !).

Exercice 8.13. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}(1/\operatorname{ch}(x))$.

Indication 8.13. Vous pouvez étudier $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$ par exemple.

Fonctions circulaires réciproques - étude de fonctions

Exercice 8.14. Déterminer la limite en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$;
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\sin(3x)}{2x}$;
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\sin x}$;
4. $f_4 : x \longmapsto (3 + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
5. $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$.

Indication 8.14. Vous pouvez faire apparaître des taux d'accroissement !

Exercice 8.15. Déterminer le domaine de définition, un ensemble sur lequel la fonction est dérivable puis calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2)$;
2. $f_2 : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x\sqrt{1-x})$;
3. $f_3 : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\ln(1 + \operatorname{ch}(2x))}{x}$;
5. $f_5 : x \longmapsto 3^{4x^2-1}$;
6. $f_6 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$.

Indication 8.15. Rien de particulier.

Exercice 8.16. On considère la fonction f, définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x).$$

1. Donner un ensemble sur lequel f est dérivable ainsi que f'. On simplifiera au maximum l'expression de f'.
2. En déduire une expression simplifiée de f.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Indication 8.16.
1. Rien de particulier.
2. Attention à ne pas oublier que l'expression obtenue n'est vraie qu'à une constante près et qu'il faut déterminer la constante adéquate.
3. On peut faire des transformations sur la courbe représentative de Arctan (d'après la question précédente).

Fonctions circulaires réciproques - équations

Exercice 8.17. Résoudre sur l'ensemble I les équations suivantes.

1. $\sin(x) = \dfrac{1}{3}$ sur $I = [2\pi\,;\,4\pi]$;
2. $\tan(x) = 2$ sur $[-3\pi\,;\,-\pi]$;
3. $\cos(x) + \sin(x) = -\dfrac{1}{2}$ sur $[\pi\,;\,3\pi]$;
4. $\cos(x)\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Indication 8.17. Équations trigonométriques standards, où les fonctions circulaires réciproques sont utiles !

Exercice 8.18. On considère l'équation (E) : $\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(x+1)=\dfrac{\pi}{2}$ d'inconnue réelle x.

1. Démontrer que (E) admet une unique solution.
2. Résoudre (E).

Indication 8.18.

1. Pour justifier qu'une équation du type $f(x)=c$ admet une unique solution, utiliser le théorème de la bijection.
2. Si α est la solution, vous pouvez commencer par montrer que $\text{Arctan}(\alpha-1)+\text{Arctan}(\alpha)+1=\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$, puis composer par tan pour en déduire α (on peut raisonner par implication car on sait que la solution existe !).

. . . .

Exercice 8.19. Résoudre l'équation $\text{Arcsin}(x)+\text{Arccos}(2x)=a$ d'inconnue réelle x, pour $a=\dfrac{\pi}{2}$, puis pour $a=\pi$ et enfin pour $a=\dfrac{\pi}{6}$.

Indication 8.19. Vous pouvez raisonner par analyse/synthèse par exemple (en composant par sin ou cos à un moment donné !).