TD 7 Fonctions usuelles

Calculs de limites

Exercice 7.1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2\ln x - x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x-3}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}+2}{x^8-1}$;

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(1/x)$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \exp\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$;

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2\ln x}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left(\frac{x^2+\ln(x)}{1+x^3}\right)^n$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{\ln x+\sqrt{x}}$;

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2^x)}{x+1}$;
11. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$;
12. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (1+x)^{1/x}$;

13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Indication 7.1. Il faut utiliser la notation exponentielle pour les fonctions puissances avec « x en exposant ». Le théorème des croissances comparées permet de lever des formes indéterminées, mais il faut s'y ramener précisément (ce qui peut nécessiter de petites pirouettes d'écriture).

Exercice 7.2. **1.** Quelle est la limite de l'expression $5^x/2^x$ en $+\infty$?

2. On introduit les fonction $f : x \longmapsto 2^{(5^x)}$ et $g : x \longmapsto 5^{(2^x)}$. Étudier la limite de la fonction f/g en $+\infty$.

Indication 7.2. Quand on a x en exposant, on peut se ramener à la forme exponentielle (ou utiliser directement le cours pour la question **1.**).

Exercice 7.3. Étudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$:

1. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}{\exp(2x)}$;
2. $g : x \longmapsto 2\,\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}(2x)$.

Indication 7.3. Il faut simplifier le plus possible les expressions pour lever les formes indéterminées.

Étude de fonctions

Exercice 7.4. On introduit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right).$$

1. Déterminer le domaine définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, puis montrer que f' est du signe de $h : x \longmapsto x-1+\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbf{R}^\star$.
3. Étudier la fonction h ainsi définie et déterminer son signe.
4. Dresser le tableau des variations de f, déterminer ses limites, puis tracer rapidement son graphe.

Indication 7.4. Rien de particulier.

. . . .

Exercice 7.5. Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles et allure de la courbe représentative) :

1. $f_1 : x \longmapsto x^x$;

2. $f_2 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$;

3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan(x)}$.

Indication 7.5. Rien de particulier.

. . . .

Exercice 7.6. On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}.$$

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Soit a un réel et f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a\,;\,+\infty[$. On suppose que f est continue et strictement monotone, et on note ℓ la limite de f en $+\infty$.
Alors, pour tout $k \in [f(a)\,;\,\ell[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

Étude des fonctions f_n

1. Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n\ln(x)$.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$ d'inconnue x réelle. Étudier le signe de f_n'.
3. Déterminer la limite de f_n aux bornes de son intervalle de définition.
4. Établir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

Représentation graphique de quelques fonctions f_n. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

5. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
6. (a) Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$. Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $\mathscr{C}_4$ à partir de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Étude sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$. Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

7. (a) Vérifier que $\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}} > 1$.
   (b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x réelle, n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1\,;\,\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.
8. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\,;\,+\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.
9. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).
   (a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > \mathrm{e}^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geqslant 1$.
   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 9$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).
   On rappelle que $\mathrm{e} \approx 2,72$.

Indication 7.6.
1. Rien à signaler.
2. Rien à signaler.
3. Attention à bien justifier s'il y a une FI.
4. Rapide avec les questions précédentes.
5. Attention à bien faire apparaître les tangentes horizontales.
6. (a) Rien à signaler.
   (b) Soit $x > 0$. Notons pour tout $m \in \mathbf{N}$, $y_m = f_m(x)$. Comment obtenir le point de coordonnées (x, y_4) à partir de celui de coordonnées (x, y_3) ? s
7. (a) On peut le déduire à l'aide de $n > 2$.

   (b) Les variations et la question précédente sont utiles.

8. Le résultat rappelé est utile.

9. **(a)** Rien à signaler.

   (b) Il faut se rappeler d'un résultat sur les suites : pour toutes suites réelles u et v telles que $u \geqslant v$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (on reverra cela en détail bientôt).

. . . .

Exercice 7.7. Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln(|2\cos(x)|)}}.$$

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $g : x \longmapsto x\ln(x)$. Établir le tableau des variations de g et déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.

2. Déterminer le domaine de définition D de f.

3. Vérifier que f est π-périodique. Cette fonction est-elle paire ? impaire ?

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sqrt{1-\sin(2x)} = |\cos(x) - \sin(x)| \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+\sin(2x)} = |\cos(x) + \sin(x)|.$$

En déduire que f est constante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \cap D$ et que, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cap D$,

$$f(x) = \exp(h(4\cos^2(x))),$$

où h représente la fonction définie pour tout $x \in \,]0\,;\,1[\, \cup \,]1\,;\,4[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln(x)}.$$

5. Montrer que f est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cap D$ et exprimer sur cet intervalle la fonction f' à l'aide de la fonction h'.

6. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \,]0\,;\,1[\, \cap \,]1\,;\,4[$.

7. En utilisant la question **1.**, déterminer le signe de h' sur $]0\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,2]$.

8. A l'aide des résultats précédents, établir le tableau des variations de f (avec les limites) sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cap D$.

9. Tracer le plus précisément possible le graphe de f sur $[-\pi\,;\,\pi] \cap D$.

Indication 7.7. **1.** Rien de particulier.

2. Question assez technique : il y a beaucoup de contraintes à vérifier, prenez votre temps.

3. Rien de particulier.

4. Il faut jouer avec les formules de trigonométrie pour établir les deux égalités. Pour $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \cap D$, on peut simplifier les deux valeurs absolues (en s'intéressant aux signes des expressions à l'intérieur de celles-ci !). Idem si $x \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cap D$, mais l'expression est moins simple.

5. Rien de particulier.

6. Rien de particulier.

7. Rien de particulier.

8. Rien de particulier.

9. Rien de particulier.

Équations et inéquations

. . . .

Exercice 7.8. Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue x réelle.

1. $(E_1) : \ln(x-2) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$;
2. $(E_2) : \dfrac{1}{2}\ln(3x-1) < \ln(x+1)$;
3. $(E_3) : e^{2x} + 3e^{x} < 4$;
4. $(E_4) : \ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) = 4$;
5. $(E_5) : \ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) \geqslant 4$;
6. $(E_6) : \big(\exp(x)\big)^2 = \exp(1-2x)$;
7. $(E_7) : \big(\exp(x)\big)^2 \leqslant \exp(1-2x)$;
8. $(E_8) : 2^{x^3} = 3^{x^2}$;
9. $(E_9) : x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Indication 7.8.
1. Simplifier avant de résoudre. N'oubliez pas de chercher le domaine de définition de l'équation avant de commencer !
2. Idem. N'oubliez pas que les solutions proposées doivent appartenir au domaine de définition de l'équation !
3. Vous pouvez faire un changement de variable.
4. Simplifier !
5. Simplifier !
6. Simplifier !
7. Retour à la forme exponentielle si vous n'avez pas de meilleure idée.
8. Idem. Attention au domaine de définition de l'équation !

. . . .

Exercice 7.9. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $(E_1) : \ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$;
2. $(E_2) : 2\ln x + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$;
3. $(E_3) : \exp(x) - 5 + 6\exp(-x) > 0$;
4. $(E_4) : \exp(3x) - 3\exp(2x) + 3\exp(x) = 1$;
5. $(E_5) : (x^2)^x = x^{(x^2)}$;
6. $(E_6) : 5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$;
7. $(E_7) : 8^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2 \times 8^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}$;
8. $(E_8) : \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2\ln\sqrt{1+x}$;
9. $(E_9) : \mathrm{ch}(x) = -2$;
10. $(E_{10}) : \mathrm{ch}(x) = 3$.

Indication 7.9.
1. Simplifier, sans oublier de chercher le domaine de définition de l'équation au préalable.
2. Idem.
3. Changement de variable.
4. Idem, avec identité remarquable !
5. Forme exponentielle.
6. Forme exponentielle.
7. Forme exponentielle.
8. Simplifier.
9. Minimum de ch ?
10. Forme exponentielle.

. . . .

Exercice 7.10. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,y & = & 7 \\ \mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}\,y & = & 5 \end{array} \right. , \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,y & = & 2 \\ \mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}\,y & = & 3 \end{array} \right. .$$

Indication 7.10.
1. Vous pouvez montrer que $e^x + 6e^{-x} = 12$ puis résoudre cette équation avec un changement de variable. Une fois x trouvé, vous pouvez en déduire y aisément.

2. Même idée.

. . . .

Exercice 7.11. **1.** Soit $y \in]1\,;+\infty[$. Montrer que l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ d'inconnue x réelle possède deux solutions, qui sont opposées l'une de l'autre. Exprimer la solution positive en fonction de y.

2. Soit $y \in \mathbf{R}$. Déterminer l'unique solution de l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$.

Indication 7.11. **1.** Vous pouvez utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour l'existence d'une solution, la stricte monotonie pour l'unicité sur $\mathbf{R}_+^\star$. Idem sur $\mathbf{R}_-^\star$ ou encore plus simplement la parité de ch. Ensuite, pour la résolution il faut bien vérifier que les solutions obtenues par le calcul appartiennent effectivement à l'ensemble de définition de l'équation. Il y a pas mal de justifications à donner, n'allez pas trop vite !

2. Similaire.

Formules

. . . .

Exercice 7.12 (*Trigonométrie hyperbolique*). Soit $(a, b, x) \in \mathbf{R}^3$. Établir les formules suivantes :

1. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$;

2. $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)$;

3. $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$;

4. $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$.

Indication 7.12. Il faut repasser par la forme exponentielle pour **1.** et **2.**. Les deux autres égalités s'en déduisent immédiatement !

. . . .

Exercice 7.13. Soit x un nombre réel non nul, et n un entier naturel. Le but de l'exercice est le calcul (ou plutôt la simplification) des sommes :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx).$$

1. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q distincte de 1.

2. En déduire la valeur de :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx}.$$

3. Conclure.

4. Pouvez-vous en déduire une expression de :

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{sh}(kx) \quad ?$$

Indication 7.13. **1.** C'est du cours.

2. Il faut utiliser la question précédente.

3. Il faut repasser à la forme exponentielle, utiliser la formule de la question précédente et y aller comme un bourrin ! Sinon, on peut simplifier $C_n(x) + S_n(x)$,$C_n(x) - S_n(x)$. En ajoutant les deux égalités obtenues, on peut trouver $2C_n(x)$ et en retranchant les deux égalités, on obtient plutôt $2S_n(x)$.

4. On peut dériver. Notons que si u, v, w sont trois fonctions dérivables, alors

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

. . . .

Exercice 7.14. Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a+kb).$$

Indication 7.14. Calculer $C_n + S_n$ peut être une bonne idée !