TD 6 — Généralités sur les fonctions

Vocabulaire sur les fonctions

Exercice 6.1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} \times (\exp(x) + \sqrt{x})$.

Indication 6.1. Il y a plusieurs contrainte : la racine carrée doit existe, le logarithme népérien également et il ne doit pas s'annuler.

Exercice 6.2. Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$.

Indication 6.2. L'expression $\dfrac{x+1}{x-2}$ doit respecter une certaine contrainte pour que $g(x)$ existe.

Exercice 6.3. On définit la fonction $k : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(3x+2)^2 \end{array}$. Décrire k comme la composée de 3 fonctions réelles simples.

Indication 6.3. Quelles opérations feriez-vous s'il vous fallait calculer $k(x)$?

Exercice 6.4. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{3x - x^2 + 2x^3}{x^5 + 4x - 6}$ définie sur $[-1\,;\,1]$ est une fonction bornée.

Indication 6.4. Vous pouvez chercher à majorer $|f(x)|$ pour tout $x \in [-1\,;\,1]$. Il faut alors minorer le dénominateur obtenu et majorer le numérateur. Pour cela, vous avez quelques inégalités avec des valeurs absolues !

Exercice 6.5. Montrer que si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles bornées sur leur domaine de définition D, alors les fonctions $f + g$ et fg sont des fonctions bornées sur D. Si g ne s'annule pas, la fonction f/g est-elle encore bornée sur D ?

Indication 6.5. C'est un exercice d'écriture, il faut traduire les hypothèses en termes mathématiques (avec les définitions du cours.

Exercice 6.6.

1. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Expliciter cette décomposition pour la fonction exponentielle : on appelle **cosinus hyperbolique** et on note ch la partie paire de cette décomposition ; on appelle **sinus hyperbolique** et on note sh sa partie impaire.
3. Étudier les deux fonctions ainsi obtenues (tableau de variations, limites et tracé rapide du graphe).
4. Vérifier que pour tout nombre réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

Indication 6.6.

1. Problème d'existence et d'unicité, une analyse synthèse est donc adaptée !
2. Il faut utiliser la forme générale normalement obtenu dans la phase d'analyse à la question précédente.
3. Rien de particulier.

4. Rien de particulier.

. . . .

Exercice 6.7. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2\cos(x) - 3\sin(3x)}{3 - \cos(x) + \sin(x)}$ puis montrer que cette fonction est périodique et bornée.

Indication 6.7. Quelle période pourrait-on bien essayer avec des fonctions cos et sin ? Pour montrer que la fonction est bornée, vous pouvez essayer de majorer $|f(x)|$...

. . . .

Exercice 6.8. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + \sin(4x+3)$ est périodique et bornée.

Indication 6.8. Pour la périodicité, faites plusieurs essais si besoin ! Pour montrer que f est borné, on majore $|f|$.

. . . .

Exercice 6.9. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = |\tan(x)| + (\cos(x))^2$ puis étudier sa parité et sa périodicité. Quelles propriétés a sa représentation graphique ?

Indication 6.9. La périodicité n'est pas très difficile à obtenir. Pour la parité, il faut chercher à simplifier $f(-x)$ (après avoir justifié que le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0, ce qui est trop souvent oublié !).

. . . .

Exercice 6.10. Déterminer le domaine de définition, la parité et la périodicité de chacune des fonctions suivantes, puis en déduire leur domaine d'étude.

1. $f_1 : x \longmapsto \cos(3x)$;

2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^4 - 4}$;

3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(|x|)}$;

4. $f_4 : x \longmapsto \sin(x) + \sin(2x+3)$;

5. $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$;

6. $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3x-4}}$.

Indication 6.10. Rien de particulier.

. . . .

Exercice 6.11. Montrer que toute fonction monotone et périodique est constante.

Indication 6.11. Supposons f croissante (il restera à faire le cas f décroissante, ou ruser pour utiliser le cas déjà fait !). Soit $x_0 \in E$, soit $x \geqslant x_0$. Vous pouvez justifier qu'il existe m entier tel que $x_0 + mT \geqslant x$, puis composer cette inégalité par f (le sens change t-il ?) et enfin conclure que $f(x) = f(x_0)$. Il reste à faire de manière similaire le cas où $x \leqslant x_0$.

. . . .

Exercice 6.12.

1. Montrer que les fonction $x \longmapsto \cos(2x)$, $x \longmapsto \sin(x/3)$ et $x \longmapsto \cos(\sqrt{2}x)$ sont périodiques.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles et périodique. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^\star$. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto f(\lambda x)$ est périodique et déterminer une de ses périodes.

Indication 6.12. Rien de particulier, faites plusieurs essais si la solution ne vous paraît pas simple.

. . . .

Exercice 6.13.

1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

2. Prouver que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{3}x)$ (où $x \in \mathbf{R}$) est bornée et atteint son maximum en 0.

3. Cette fonction est-elle périodique ?

4. Énoncer une condition suffisante pour laquelle la somme, respectivement le produit, respectivement le quotient, de deux fonctions périodiques est périodique.

Indication 6.13.

1. La démonstration pour $\sqrt{2}$ a été faite dans le cours, on peut facilement l'adapter.

2. Un majorant de $|f|$ peut être trouvé très rapidement. Ensuite, il faut trouver une valeur de x pour laquelle ce majorant est atteint.

3. Vous pouvez raisonner par l'absurde pour montrer que f n'est pas périodique.

4. Relisez bien les questions précédentes, on demande ici de généraliser ce qui a été obtenu sur un cas particulier.

. . . .

Exercice 6.14. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha \lfloor x \rfloor \end{array}$. Montrer que f est périodique si et seulement si α est rationnel.

Indication 6.14.

- Implication directe. Notons $T > 0$ une période de f. Il faut utiliser $f(0) = f(T)$ pour en déduire que α est égal à un quotient d'entiers.
- Implication réciproque. Si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $q \neq 0$, on peut montrer que f est q-périodique.

Transformations géométriques sur les courbes

. . . .

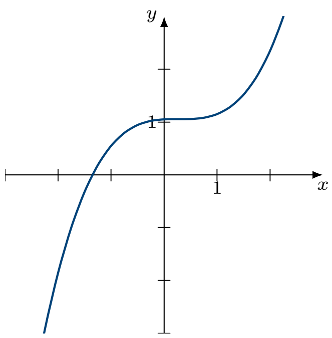
Exercice 6.15. Rappeler l'allure du graphe de la fonction racine carrée, définie sur $\mathbf{R}_+$. Donner rapidement le graphe des fonctions

$$f_1 : x \longmapsto \sqrt{-x} \qquad f_2 : x \longmapsto \sqrt{x} + 1 \qquad f_3 : x \longmapsto \sqrt{x+1} \qquad f_4 : x \longmapsto \sqrt{1-x} \qquad f_5 : x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$$

Indication 6.15. Rien à signaler.

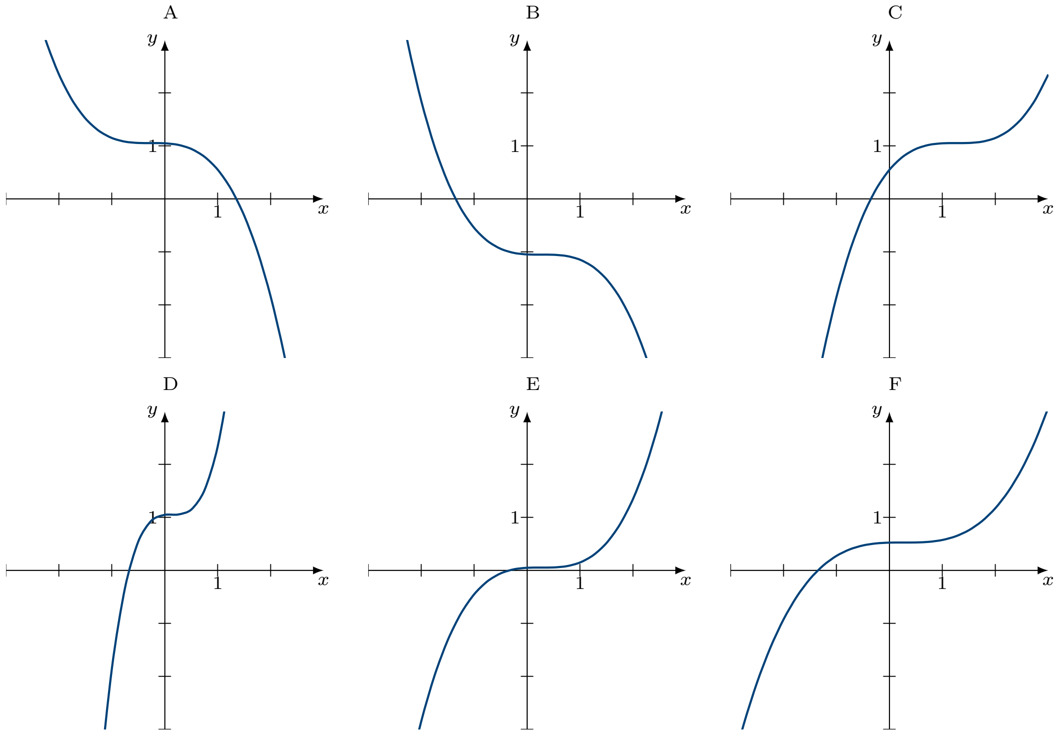
. . . .

Exercice 6.16. Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2\,;\,2]$.



Choisir parmi les fonctions suivantes celles qui sont représentées par une des courbes données ci-après.

1. $f_1 : x \longmapsto f(-x)$; **2.** $f_2 : x \longmapsto -f(x)$; **3.** $f_3 : x \longmapsto f(x+1)$; **4.** $f_4 : x \longmapsto f(x)+1$;
5. $f_5 : x \longmapsto f(x-1)$; **6.** $f_6 : x \longmapsto f(x)-1$; **7.** $f_7 : x \longmapsto f(2x)$; **8.** $f_8 : x \longmapsto 2f(x)$;
9. $f_9 : x \longmapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$; **10.** $f_{10} : x \longmapsto \frac{f(x)}{2}$.



Indication 6.16. Rien à signaler.

Exercice 6.17. À partir des graphes des fonctions usuelles et de transformations simples, tracer, sans étude, le graphe des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \exp(x+1)$;

2. $f_2 : x \longmapsto 2 + \cos(x)$;

3. $f_3 : x \longmapsto \sqrt{1-x}$;

4. $f_4 : x \longmapsto 1 - \exp(x)$;

5. $f_5 : x \longmapsto 3 - \sqrt{2+x}$;

6. $f_6 : x \longmapsto \ln(1-x) + 2$;

7. $f_7 : x \longmapsto \sin(3x)$;

8. $f_8 : x \longmapsto 3\sin(x) + 1$;

9. $f_9 : x \longmapsto 3 - \exp(-2x)$;

10. $f_{10} : x \longmapsto \dfrac{1}{2} + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

11. $f_{11} : x \longmapsto \dfrac{2+x}{1+x}$;

12. $f_{12} : x \longmapsto \dfrac{3+x}{1-x}$.

Indication 6.17. Attention, il peut y avoir plusieurs transformations à faire. Pour les deux dernières questions, vous pouvez remarquer que

$$\forall x \neq -1,\ f(x) = 1 + \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \forall x \neq 1,\ f(x) = \frac{4}{1-x} - 1.$$

Autour de la dérivation

Exercice 6.18. Pour chacune des fonctions f_i suivantes,

- déterminer leur domaine de définition $\mathcal{D}_{f_i}$;
- déterminer sur quelle partie de $\mathcal{D}_{f_i}$ les théorèmes généraux de dérivabilité assurent que f_i est dérivable ;
- calculer leur dérivée.

1. $f_1 : x \longmapsto \sin(3x-5)$;

2. $f_2 : x \longmapsto \left(\ln(x) + 3x - \mathrm{e}^x\right)^4$;

3. $f_3 : x \longmapsto x\exp\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$;

4. $f_4 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x(2-x)}{1+x}}$;

5. $f_5 : x \longmapsto \ln\left(1 - \exp(x)\right)$;

6. $f_6 : x \longmapsto \sqrt{1 - \sin(x)}$;

7. $f_7 : x \longmapsto x^2 \ln\left(\sqrt{x}\right)$;

8. $f_8 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}\cos\left(\sqrt{x}\right)$;

9. $f_9 : x \longmapsto \sqrt{1 - \ln(x)}\cos\left(\mathrm{e}^x\right)$;

10. $f_{10} : x \longmapsto \ln\left(\left|\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right|\right)$.

Indication 6.18. Rien de particulier.

Exercice 6.19. On considère les fonctions suivantes :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x^2 - x + 1)\mathrm{e}^x \end{array} \quad \text{et} \quad k : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x^2+3}\ln(x) \end{array}$$

1. Étudier la limite de h en $+\infty$ ainsi que la limite de k en 0.
2. Justifier que h et k sont dérivables sur leur ensemble de définition et calculer leurs dérivées.

Indication 6.19. **1.** S'il y a une FI, vous pouvez factoriser par le terme « prépondérant ».
2. Rien de particulier.

Exercice 6.20. Déterminer, à l'aide des théorèmes généraux sur la dérivabilité, un ensemble où les fonctions suivantes sont dérivables, puis calculer les dérivées.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} \times (\exp(x) + \sqrt{x})$;

2. $\ell : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$.

Indication 6.20. Rien à signaler.

Exercice 6.21. Quelle est le signe de la dérivée de $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$? Cette fonction est-elle décroissante sur $\mathbf{R}^\star$?

Indication 6.21. Attention, le théorème qui assure qu'une fonction dont la dérivée est négative est décroissante n'est vrai que pour les fonctions définies sur un intervalle. $\mathbf{R}^\star$ est en t-il un ?

Exercice 6.22. Pour x et y réels, on s'intéresse à $xy^2\cos(x)$. Déterminer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy^2\cos(x)) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(xy^2\cos(x)).$$

Indication 6.22. Dans la première expression, y est considéré comme une constante et on dérive par rapport à x.

Exercice 6.23. Calculer la dérivée troisième de $f : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) + x^2 \end{array}$.

Indication 6.23. On dérive une fois, puis deux et enfin encore une troisième ! N'oubliez pas de préciser la dérivabilité à chaque fois.

Exercice 6.24. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, déterminer une expression simple de la dérivée n-ième de la fonction logarithme.

Indication 6.24. Vous pouvez calculer les premières dérivées, puis émettre une conjecture que vous démontrerez ensuite.

Exercice 6.25. La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right).$$

Indication 6.25. On demande de démontrer une formule pour des entiers... N'oubliez pas les formules de trigonométrie !

Étude de fonctions

Exercice 6.26. Quelles sont les variations de $p : x \longmapsto \ln(\cos(x))$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$?

Indication 6.26. Vous pouvez reconnaître une composée de fonctions monotones ici (on peut donc éviter le calcul de dérivée !).

Exercice 6.27. Soit f la fonction dont l'expression est $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Indication 6.27. Assez long, mais pas trop difficile. Voici les principales étapes :

1. déterminer le domaine de définition ;
2. réduire le domaine de définition (en étudiant la parité éventuelle, la périodicité éventuelle) ;
3. calculer les limites ;
4. justifier la dérivabilité et dériver ;
5. donner le tableau de variation complet ;
6. chercher l'équation de la tangente en 0, montrer que $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$;
7. représenter $\mathscr{C}_f$ (en utilisant tous les points précédents !).

Exercice 6.28. Étudier la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2+\cos(x)}{-3+\cos(x)} \end{array}$ et tracer son graphe.

Indication 6.28. Il faut suivre le plan du cours (on réduit le domaine d'étude, on étudie les variations, etc.)

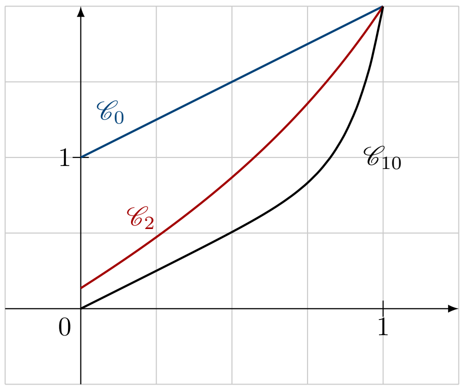
Exercice 6.29.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est strictement positive.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est strictement croissante.
3. Montrer qu'il existe un point A du plan qui appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ (où n peut être n'importe quel entier naturel).



Indication 6.29.

1. Rien de particulier.
2. Attention, n est une constante ici !
3. La courbe donnée est déjà une grosse indication !

Exercice 6.30. Soit k un réel fixé. On considère la fonction $f_k : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+k}$.

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}_k$ de définition de f_k.
2. Montrer que la courbe représentative Γ_k de f_k a la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ pour axe de symétrie. En déduire un domaine d'étude $\mathcal{E}_k$ de la fonction.
3. Sur quel partie $\mathcal{A}_k$ de $\mathcal{E}_k$ les théorèmes classiques assurent-ils que f est dérivable ? Calculer f' sur $\mathcal{A}_k$.

4. Dresser le tableau des variations de f_k sur $\mathcal{E}_k$. Préciser les tangentes horizontales éventuelles.
5. Calculer la limite de $f_k(x) - x$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. En déduire qu'il existe un réel a tel que $f_k(x) - (x+a)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire que Γ_k possède une asymptote dont on précisera une équation.
7. Montrer qu'il existe $c_k \in \mathbf{R}$ tel que $f_k(x) = \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + c_k}$ pour tout $x \in \mathcal{E}_k$. En déduire la position de Γ_k par rapport à la droite d'équation $y = x + \frac{3}{2}$.
8. Tracer Γ_k.

Indication 6.30. 1. Il a plusieurs cas à distinguer, suivant le signe du discriminant de $x^2 + 3x + k$ (et il faudra distinguer des cas dans tout l'exercice !).
2. Il faut montrer que $f(-3-x) = f(x)$.
3. Rien de particulier.
4. Rien de particulier.
5. Il faut utiliser la forme conjuguée.
6. Presque immédiat avec la question précédente.
7. Il faut montrer une inégalité.
8. Rien à signaler, toutes les informations obtenues sont utiles.

. . . .

Exercice 6.31. Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction :

$$f_k : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)\mathrm{e}^{-kx} \end{array}$$

et on note Γ_k sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer qu'il existe deux points communs à toutes les courbes Γ_k.

Indication 6.31. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, vous pouvez chercher une condition nécessaire et suffisant pour que le point d'abscisse x appartienne à $\Gamma_0 \cap \Gamma_k$.

. . . .

Exercice 6.32. Donner le domaine de définition et tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor, \quad g : x \longmapsto \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}.$$

Indication 6.32. Pour le domaine de définition, on utilise la méthode habituelle. On s'intéressera donc à l'équation $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}^\star$ pour le domaine de définition de g.
Pour se donner une idée de l'allure de la courbe représentative de g, on peut essayer de résoudre $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$, puis $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 2$, et généraliser à $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k$, où $k \in \mathbf{Z}$.
On rappelle que, pour tout $(x, \alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor x \rfloor = \alpha \iff \alpha \leqslant x < \alpha + 1$.