# TD 4 Nombres complexes

## Forme algébrique d'un complexe

**Exercice 4.1.** Soit $a$ un nombre complexe différent de $i$. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

**1.** $z_1 = \dfrac{3-2i}{5-3i}$ ; **2.** $z_2 = (3+2i)(2+i)^2$ ; **3.** $z_3 = (a+i)^2$ ; **4.** $z_4 = \dfrac{a+i}{a-i}$.

**Indication 4.1.** Il faut appliquer les règles opératoires sur les complexes. Quand on a un quotient, on multiplie numérateur et dénominateur par la forme conjuguée du dénominateur. Attention, $a$ est un nombre complexe et non un réel, il faut donc introduire $x = \mathfrak{Re}(a)$ et $y = \mathfrak{Im}(a)$ (de sorte que $a = x + iy$) pour éviter de faire des erreurs.

**Exercice 4.2.** Soit $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes. Montrer que l'égalité $\mathfrak{Re}(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\,\mathfrak{Re}(z_2)$ a lieu si, et seulement si, l'un au moins des deux nombres $z_1$ et $z_2$ est réel.

**Indication 4.2.** Il faut introduire $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ tels que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ pour commencer.

## Forme exponentielle d'un complexe

**Exercice 4.3.** Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

**1.** $z_1 = -3i$ ; **2.** $z_2 = 1 + i$ ; **3.** $z_3 = 3 - 3i$ ; **4.** $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$ ; **5.** $z_5 = 3 - \sqrt{3}i$.

**Indication 4.3.** Le module est donné par une formule, la méthode pour trouver un argument est dans le cours.

**Exercice 4.4.** L'objectif de l'exercice est de calculer $(1+i)^8$ de deux manières différentes.

1. En utilisant une identité remarquable, développer $(1+i)^8$ et donner sa forme algébrique.
2. Donner la forme exponentielle de $1+i$ puis en déduire la forme exponentielle de $(1+i)^8$ et enfin sa forme algébrique.

**Indication 4.4.**
1. Vous pouvez commencer par $(i+1)^2$.
2. Rien à signaler, vous devez évidemment retrouver le même résultat qu'avant !

**Exercice 4.5.** Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes

**1.** $z_1 = 1 + i$ ; **2.** $z_2 = 1 - i$ ; **3.** $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ ;

**4.** $z_4 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ ; **5.** $z_5 = -i$ ; **6.** $z_6 = (1-\sqrt{2})\mathrm{e}^{i\pi/3}$ ;

**7.** $z_7 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ ; **8.** $z_8 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ ; **9.** $z_9 = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**Indication 4.5.** Le module est donné par une formule, la méthode pour trouver un argument est dans le cours.

6. Attention, ça n'est pas la forme exponentielle qui est donnée !
8. C'est $z_7^4$ qui est demandé (quelle est la forme la plus simple pour calculer une puissance d'un complexe ?).

**9.** Attention, ça n'est pas la forme trigonométrique qui est donnée !

**Exercice 4.6.** Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

**1.** $z_1 = (-\sqrt{3} - i)^{16}$ ; **2.** $z_2 = (1-i)^{21}$ ; **3.** $z_3 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$ ; **4.** $z_4 = \left(\dfrac{1-3i}{1+2i}\right)^{10}$.

**Indication 4.6.** Quelle est la forme la plus simple pour calculer une puissance d'un complexe ?

**Exercice 4.7.** Soit $\theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = 1 + i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

**Indication 4.7.** Vous pouvez commencer par factoriser par $\dfrac{1}{\sin(\theta)}$ puis appliquer des formules de trigonométrie pour transformer cos en sin et sin en cos. Il faudra ensuite distinguer des cas selon le signe de $\dfrac{1}{\sin(\theta)}$.

**Exercice 4.8.** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha$ ou $\beta$ les nombres ci-dessous sont correctement définis puis calculer leur module et en déterminer un argument.

**1.** $z_1 = 1 + \mathrm{e}^{i\alpha}$ ; **2.** $z_2 = \dfrac{1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}$ ; **3.** $z_3 = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta}}{1+\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}}$.

**Indication 4.8.** Factorisation par l'angle moitié ! Attention au signe des réels en facteur avant de conclure que ce sont des modules !

**Exercice 4.9.** Soient $u$ un nombre complexe non nul. Déterminer le module et un argument de $u + i\overline{u}$.

**Indication 4.9.** Introduire la forme algébrique pour bien commencer. Ensuite, il faudra distinguer des cas suivant le signe de $a+b$.

**Exercice 4.10.**

**1.** Calculer le module et un argument de $\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

**2.** Résoudre l'équation $(E)$ suivante, d'inconnue $x$ réelle.

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 0.$$

**Indication 4.10.**

**1.** En écrivant de deux manières différentes le complexe proposé, vous pouvez obtenir $\cos(-\pi/12)$ et $\sin(-\pi/12)$. Ensuite, avec des formules de trigonométrie, vous pouvez conclure.

**2.** La technique pour simplifier une somme de sinusoïdes est utiles ici !

**Exercice 4.11.** Déterminer les nombres entiers $n \geqslant 0$ tels que $\omega_n = (1+i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel.

**Indication 4.11.** Quelle est la forme simple pour déterminer une puissance d'un complexe ?

**Exercice 4.12.** On pose $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

**1.** Déterminer la forme exponentielle de $j$.

**2.** Calculer $j^2$ et $j^3$ (on donnera leur forme algébrique).

**3.** Vérifier que $1+j+j^2=0$.

**4.** Calculer la somme $1+j+j^2+j^3+\cdots+j^{2021}$.

**Indication 4.12.** **1.** Rien à signaler.

**2.** Rien de particulier, $j^3$ est très simple.

**3.** Rien à signaler.

**4.** Il faut utiliser la question précédente, le résultat est très simple.

## Autour du module, de l'argument, du conjugué

**Exercice 4.13.** Soit $(a,b)\in\mathbf{C}^2$ tel que $\bar{a}b\neq 1$. On pose $c=\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$.

**1.** Montrer que $|c|=1$ si et seulement si $|a|=1$ ou $|b|=1$.

**2.** Montrer que $|c|<1$ si et seulement si $|a|$ et $|b|$ sont tous deux strictement supérieurs ou strictement inférieurs à 1.

**Indication 4.13.** Les calculs sont similaires dans les deux questions. Il faut se ramener à une (in)égalité avec 0 et factoriser.

**Exercice 4.14.** Déterminer les nombres complexes $z$ tels que

**1.** $z\big(2\overline{z}+1\big)=1$ ; **2.** $|z^2|=|z|$ ; **3.** $\dfrac{z+4i}{5z-3}\in\mathbf{R}$ ; **4.** $\dfrac{z+4i}{5z-3}\in i\mathbf{R}$.

**Indication 4.14.** **1.** Vous pouvez vous ramener à $z=\ldots\iff z\in\mathbf{R}$ et ....

**2.** Factoriser !

**3.** Vous pouvez commencer par écrire $z$ sous forme algébrique.

**4.** Idem. À la fin, vous pouvez décrire l'ensemble cherché géométriquement.

**Exercice 4.15.** Quel est l'ensemble $E$ des complexes $z$ tels que $z$, $z^2$ et $1-z$ aient le même module ?

**Indication 4.15.** Vous pouvez commencer par montrer que toutes les solutions sont de module 1, donc sous la forme $\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbf{R}$. Ensuite, calculer le module de $1-z$, puis résoudre $|1-z|=|z|$ par exemple pour trouver les valeurs de $\theta$ convenables.

**Exercice 4.16.** Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes distincts de module 1.

**1.** Montrer que $Z=\dfrac{z^2-1}{z}$ est un imaginaire pur.

**2.** Montrer que $Z'=\dfrac{zz'-1}{z'-z}$ est un nombre réel.

**Indication 4.16.** **1.** Vous pouvez appliquer la méthode habituelle pour avoir un réel au dénominateur.

**2.** Idem.

**Exercice 4.17.** **1.** Soit $u,v\in\mathbf{C}$. Démontrer l'égalité $|u+v|^2+|u-v|^2=2\big(|u|^2+|v|^2\big)$.

**2.** Interpréter géométriquement cette égalité pour en déduire une propriété remarquable du parallélogramme. Que retrouve-t-on dans le cas d'un rectangle ?

**3.** Déterminer une formule permettant de calculer la longueur de la médiane d'un triangle lorsqu'on connaît la longueur de ses trois côtés.

**Indication 4.17.** **1.** Il faut se rappeler que $|z|^2 = z\overline{z}$ et développer les expressions proposées.

**2.** Le terme de gauche est la somme des longueurs des diagonales d'un parallélogramme. À quoi correspond le terme de droite ?

**3.** Considérer $ABC$ un triangle, ajouter un point $D$ pour obtenir un parallélogramme et chercher à appliquer la formule précédente.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 4.18 .** Démontrer, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, les inégalités suivantes et caractériser les cas d'égalité :

**1.** $|z| + |z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'|$ ;

**2.** $|\mathfrak{Re}(z)| + |\mathfrak{Im}(z)| \leqslant \sqrt{2}|z|$.

**Indication 4.18.** **1.** On a $|z+z'+z-z'| \leqslant \ldots$ et $|z+z'+z-z'| = |\ldots|$, donc ?

**2.** Si $z = a+ib$ avec $z \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, vous pouvez essayer de trouver l'inégalité demandée à partir de $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$ en raisonnant par équivalences.

## Équations

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 4.19.** Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

**1.** $(E_1) :\ 2i\overline{z} = 1+i$ ;

**2.** $(E_2) :\ 2z + 3\overline{z} = 3 - i$.

**Indication 4.19.** Dans les deux cas, vous pouvez introduire la forme algébrique (et utiliser l'unicité de l'écriture sous cette forme, qui permet d'identifier parties réelles et parties imaginaires de deux complexes égaux). Pour la première question, on peut être plus main et faire disparaître la forme conjuguée rapidement !

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 4.20.** Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2z} = 3 - 3\sqrt{3}i$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

**Indication 4.20.** Rien de particulier, la méthode est dans le cours.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 4.21.** Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{C}^2$.

**1.** $\left\{\begin{array}{rcl} x - iy &=& 1 \\ ix - y &=& 1 \end{array}\right.$ ;

**2.** $\left\{\begin{array}{rcl} ix - iy &=& 1+i \\ ix + y &=& 1-i \end{array}\right.$ ;

**3.** $\left\{\begin{array}{rcl} (1+i)x + (1-i)y &=& i \\ (1-i)x + (1+i)y &=& 1-i \end{array}\right.$ ;

**4.** $\left\{\begin{array}{rcl} (1+i)x + iy &=& 0 \\ 2x + (1+i)y &=& 0 \end{array}\right.$ ;

**5.** $\left\{\begin{array}{rcl} x - iy &=& 1 \\ ix + y &=& i \end{array}\right.$ ;

**6.** $\left\{\begin{array}{rcl} (1+i)x + iy &=& -1+i \\ (1-3i)x + (2-i)y &=& 3+2i \end{array}\right.$ .

**Indication 4.21 .** Les méthodes pour résoudre ces systèmes sont les mêmes que sur $\mathbf{R}$, même si les calculs peuvent être plus pénibles...