TD 3

TRIGONOMÉTRIE

Utilisation du formulaire

Exercice 3.1. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Simplifier

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}.$$

Indication 3.1. Il y a plusieurs façons d'aller au bout. Essayer de voir si un de cette expression apparaît dans le formulaire de trigonométrie pour commencer.

Exercice 3.2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Indication 3.2. Vous pouvez chercher à écrire $\frac{\pi}{12}$ comme la différence de deux angles remarquables, puis appliquer une égalité du formulaire pour conclure.

Exercice 3.3. 1. Soit p et q des réels. Montrer que

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

à partir des formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

2. Déterminer des formules similaires permettant de transformer en produit $\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$

Indication 3.3. Il faut résoudre des systèmes 2×2 bien choisis (d'inconnue $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ par exemple).

Exercice 3.4. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Indication 3.4. Vous pouvez utiliser la formule $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$ par exemple.

Exercice 3.5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que l'expression $3(\cos^4 x + \sin^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ ne dépend pas de x

Indication 3.5. Essayer de tout exprimer en fonction de $\cos$ avec l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = \dots$

Résolution d'équations, d'inéquations

Exercice 3.6. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

1. $\sin x = 0;$

2. $\sin x = 1;$

3. $\sin x = -1;$

4. $\tan x = 0;$

5. $\tan x = 1;$

6. $\cos x = \frac{1}{2};$

7. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}};$

8. $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Indication 3.6. On lit directement sur le cercle trigonométrique les solutions. Pour la dernière question, vous pouvez commencer par écrire $|\cos(x)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) = \dots$ ou $\cos(x) = \dots$

Exercice 3.7. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}, I = [0; 2\pi]$.
2. $\tan(5x) = 1, I = [0; \pi]$.
3. $\sin x = \tan x, I = [0; 2\pi]$.
4. $12 \cos^2 x - 8 \sin^2 x = 2, I =]-\pi; \pi]$.
5. $3 \sin(2x) - 3\sqrt{3} \cos(2x) = \sqrt{18}, I = [0; 2\pi]$.
6. $3 \tan(x) = 2 \cos(x), I = \mathbf{R}$.
7. $\sin(x) + \sin(3x) = 0, I = \mathbf{R}$.
8. $\cos(4x) = \sin(5x), I = \mathbf{R}$.
9. $3 \cos(5x) = \sin(2x) + \sin(12x), I = \mathbf{R}$.

Indication 3.7. 1. Cercle trigonométrique.

2. Cercle trigonométrique.
3. Vous pouvez transformer $\tan$ pour démarrer.
4. Vous pouvez tout exprimer en fonction de $\cos$.
5. Vous pouvez vous ramener à une forme $R \sin(2x - \theta) = \varphi$.
6. Vous pouvez vous ramener à une équation exprimée uniquement avec sinus.
7. Vous pouvez vous ramener à une égalité de sinus.
8. Même indication.
9. $12 = 7 + 5$.

Exercice 3.8. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $\cos x \leq \frac{1}{2}, I =]-\pi; \pi]$.
2. $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}, I = \mathbf{R}$.
3. $\cos^2 x \geq \cos(2x), I =]-\pi; \pi]$.
4. $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}, I = [0; 2\pi]$.
5. $\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3}, I = [0; 9\pi]$.

Indication 3.8. 1. Cercle trigonométrique.

2. Cercle trigonométrique.
3. Vous pouvez tout exprimer avec $\cos(2x)$.
4. En utilisant $X^2 \leq \frac{1}{2} \iff \dots$, vous pouvez vous ramener à la résolution de deux inégalités faisant intervenir $\cos(x)$ (et non plus $\cos(x)^2$).
5. Vous pouvez vous ramener à une inéquation du type $\sin\left(\theta - \frac{x}{3}\right) \leq 0$, qu'on résout avec le cercle trigonométrique.

Exercice 3.9. Résoudre l'équation (E) : $\sin x + \frac{\cos 2x}{2 \cos x} = 0$ d'inconnue x réelle.

Indication 3.9. Mise au même dénominateur, somme de sinusôides à transformer en un unique cosinus (ou sinus si vous préférez).

Exercice 3.10. Soit $E = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$. Dans cet exercice, vous n'avez le droit d'utiliser que les formules d'addition (on remontre ici certaines formules de trigonométrie).

1. Montrer que $\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$.
2. En déduire une écriture de $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ pour $\theta \in E$.
3. Résoudre l'équation $\sin(2\theta) = 3 \tan(\theta)$ sur E .

Indication 3.10. 1. Vous pouvez utiliser $\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2}$.

2. Il faut bien entendu la question précédente. Vous pouvez aussi utiliser $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$.

3. Il faut bien entendu utiliser la question précédente et se ramener à une équation avec uniquement des tangentes.

Exercice 3.11. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

$$\cos^{2018} x + \cos^{2019} x + \cos^{2020} x = 3.$$

Indication 3.11. Puisque $\cos^k(x) \in [-1; 1]$, on a

$$\cos^{2018} x + \cos^{2019} x + \cos^{2020} x = 3 \iff \begin{cases} \cos^{2018}(x) = \dots \\ \cos^{2019}(x) = \dots \\ \cos^{2020}(x) = \dots \end{cases} .$$

.....

Exercice 3.12. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation

$$\sqrt{3 - 4 \cos^2 x} > 1 + 3 \sin x.$$

Indication 3.12. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. On obtient une réunion de deux intervalles : minorer ou majorer $1 + 3 \sin(x)$ sur chacun des intervalles pour conclure (sur un intervalle, l'inéquation est toujours vraie ; sur l'autre intervalle, elle n'est jamais vraie).

Exercice 3.13. Soit $n \geq 3$.

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\cos^n(x) - \sin^n(x) = 1$.

Indication 3.13. 1. Pour démarrer : vous pouvez factoriser l'expression par $\cos^2(x)$ et ensuite utiliser qu'une somme de deux nombres négatifs est nulle si et seulement si les deux termes sont nuls. Il faudra ensuite distinguer des cas suivant la parité de n .

2. Il faudra aussi distinguer des cas, utiliser la question 1. pour le cas où n est impair. C'est plus difficile!