TD 2 Inégalités, équations et inéquations

Inégalités

Exercice 2.1. Soit $x \in [1\,;\,2]$. Montrer que $\dfrac{1}{(x-4)^2} \in [0\,;\,1]$.

Indication 2.1. On peut commencer avec ce que l'on sait, à savoir $1 \leqslant x \leqslant 2$, puis chercher à recomposer $\dfrac{1}{(x-4)^2}$ à l'aide d'opérations sur les inégalités. La règle à retenir est la suivante : quand on applique une fonction croissante à une inégalité, le sens de l'inégalité ne change pas ; quand on lui applique une fonction décroissante, le sens change.

Exercice 2.2.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tous nombres réels a et b, $a + b \leqslant (1+a^2)(1+b^2)$.

Indication 2.2.

1. Vous pouvez écrire la forme canonique du trinôme pour conclure simplement (pour rappel, il faut trouver a, b des réels tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + \dfrac{1}{2} = (x-a)^2 + b$.
2. Vous pouvez développer le produit $(1+a^2)(1+b^2)$ et utiliser des minorations de a^2, b^2 données par la question précédente.

Exercice 2.3.

1. Montrer que pour tous nombres réels a et b, on a $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
2. En déduire que pour tous nombres réels $a,\ b$ et c, on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Indication 2.3.

1. Vous pouvez faire une petite analyse au brouillon avant de commencer pour voir de quelle inégalité vraie on peut partir pour démarrer la preuve.
2. Il faut chercher à faire apparaître des termes de la forme $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ dans le but de pouvoir appliquer l'inégalité de la question précédente (on l'appliquera trois fois en tout !).

Exercice 2.4.

1. Prouver que pour tous nombres réels x et y non simultanément nuls,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. Soit $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$. Déduire de la question précédente que

$$\frac{x}{x^4+y^2} \leqslant \frac{1}{2xy},$$

puis que,

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

Indication 2.4.

1. Vous pouvez faire une petite analyse au brouillon avant de commencer pour voir de quelle inégalité vraie on peut partir pour démarrer la preuve.

2. En appliquant l'inégalité de la question précédente à un couple bien choisi, on peut montrer que $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leqslant \dfrac{1}{2xy}$.
On peut obtenir de même une majoration de $\dfrac{y}{x^2+y^4}$, puis conclure.

Exercice 2.5. Soit a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Indication 2.5. On peut étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b}$, avec les méthodes habituelles (on dérive f, on factorise $f'(x)$ pour étudier son signe, on montre que f admet un extremum qu'on calcule).

Exercice 2.6.

1. Étudier le signe de la fonction f définie par $f(x) = (2x^2+4x+1) - (x+2)^2$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 6$, $2^n + 1 \geqslant (n+1)^2$.

Indication 2.6.

1. On pourra présenter le résultat dans un tableau de signe. Puisque $f(x)$ est un trinôme, on peut calculer ses racines et en déduire son signe, en fonction de $x \in \mathbf{R}$!

2. Récurrence. La question **1.** est utile dans l'hérédité.

Exercice 2.7. Soit n un entier naturel non nul. Soient $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ des nombres réels positifs tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \leqslant b_i$. Prouver que :

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + ... + \sqrt{a_n}}} \leqslant \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + ... + \sqrt{b_n}}}.$$

Indication 2.7. Ce résultat peut se démontrer par récurrence.
L'hypothèse au rang n peut s'écrire H_n : « pour tous $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ réels vérifiant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \leqslant b_i$, $a_i \leqslant b_i$, on a $\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + ... + \sqrt{a_n}}} \leqslant \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + ... + \sqrt{b_n}}}$. ».
Dans l'hérédité, on appliquera l'hypothèse de récurrence au $2n$-uplet $\left(a_1, ..., a_{n-1}, a_n + \sqrt{a_{n+1}}, b_1, ..., b_{n-1}, b_n + \sqrt{b_{n+1}}\right)$.

Exercice 2.8 (*Inégalité de Bernoulli*).

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \ \forall n \in \mathbf{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

2. Quand peut-on préciser cette inégalité par une inégalité stricte ?

Indication 2.8.

1. Faire une récurrence.

2. On pourra montrer par récurrence que

$$\forall x \in \ [-1, +\infty[\backslash\{0\}, \quad \forall n \in \mathbf{N}\backslash\{0, 1\}, \quad (1+x)^n > 1 + nx.$$

Valeur absolue

Exercice 2.9. Écrire sans valeur absolue, suivant la valeur de x, les expressions suivantes.

1. $f(x) = |3x - 2|$; **2.** $f(x) = |2x + 4| + |-3x + 6|$; **3.** $f(x) = 2\,|3x - 9| - 3\,|x - 5|$.

Indication 2.9. Il faut distinguer des cas suivants le signe des expressions « dans » les valeurs absolues. Par exemple, si $x \in \mathbf{R}$, puisque $x + 3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant -3$, on a

$$|x+3| = \begin{cases} \ \ x+3 & \text{si} \quad x \geqslant -3 \\ -x-3 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

Exercice 2.10. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour chaque question, trouver une assertion équivalente sous la forme $|x-a| \leqslant b$ ou $|x-a| \geqslant b$, où a et b sont des réels à déterminer.

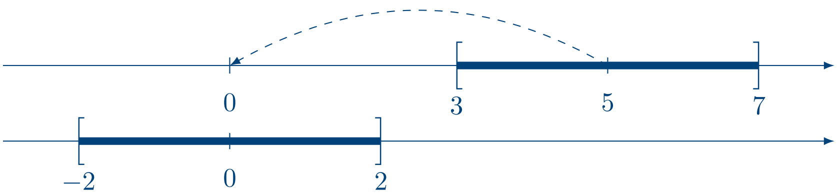
1. $x \in [3\,;\,7]$;

2. $x \in [-4\,;\,9]$;

3. $x \in]-\infty\,;\,-2]$ ou $x \in [2\,;\,+\infty[$;

4. $x \notin]8\,;\,14[$.

Indication 2.10. Dans cette question, x est encadré entre deux valeurs, on va donc essayer de sa ramener à la forme $|x-a| \leqslant b$. Or cette assertion est équivalente à $-b \leqslant x-a \leqslant b$, c'est-à-dire $x-a \in [-b\,;\,b]$. Il faut donc « décaler » l'intervalle $[3\,;\,7]$ d'un certain réel a pour qu'il ait la forme $[-b\,;\,b]$.



Pour les autres questions, on exploite la même idée (sauf pour la **3.** où on peut obtenir directement la réponse).

. . . .

Exercice 2.11. Représenter graphiquement les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| \leqslant 3\}$;

2. $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 2\}$;

3. $C = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| \geqslant 1\}$.

Indication 2.11. Le cours donne directement le résultat pour les deux premières questions. Le cours donne également le complémentaire de C dans $\mathbf{R}$.

. . . .

Exercice 2.12. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance entre $f(x)$ et 0 est inférieure à $\dfrac{1}{2}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance entre $f(x)$ et 1 est inférieure à ε.

Indication 2.12. **1.** La distance entre $f(x)$ et 0 est $|f(x)-0|$. On demande donc de résoudre $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, d'inconnue x réelle. On obtient deux inéquations à résoudre : il faut à chaque fois « tout passer du même côté » et écrire les expressions comme une unique fraction, en vue de faire un tableau de signes. Cette question est longue, ne soyez pas surpris !

2. On peut aller un peu plus vite que dans la question précédente, et montrer que l'inéquation $|f(x)-1| \leqslant \varepsilon$ est équivalente à $|x| \geqslant \dfrac{1}{2\varepsilon}$ (qu'on sait alors résoudre directement via le cours).

. . . .

Exercice 2.13. Soit a et b deux réels. On note $\max(a,b)$ le plus grand de ces deux nombres et $\min(a,b)$ le plus petit.

1. Dessiner la droite réelle et y placer les points d'abscisses a, b et $\dfrac{a+b}{2}$. Quelle longueur représente le réel $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$?

2. À l'aide du dessin, conjecturer une expression de $\max(a,b)$ et une expression de $\min(a,b)$ ne faisant intervenir que $\dfrac{a+b}{2}$ et $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$.

3. Démontrer cette conjecture.

Indication 2.13. **1.** Que représente la longueur $|a-b|$?

2. Il faut s'aider du dessin.

3. Disjonction de cas.

. . . .

Exercice 2.14. **1.** Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\sqrt{|x+y|} \leqslant \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$.

2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leqslant \sqrt{|x+y|}$.

Indication 2.14. **1.** Vous pouvez montrer les inégalités avec des carrés pour commencer, puis utiliser l'inégalité triangulaire.

2. Il faut appliquer l'inégalité de la question précédente à deux couples bien choisis d'entiers pour montrer que

Exercice 2.15. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $g(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$.
Montrer que pour tous réels x et y, on a $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$.

Indication 2.15. Vous pouvez étudier le signe de $g(x)+g(y)-g(x+y)$. L'inégalité triangulaire pourra être utile !

Équations, inéquations

Exercice 2.16 (*Inéquations sous forme de quotient*). Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $\dfrac{x+1}{-x+6} < 0$; **2.** $\dfrac{3x-4}{2x+3} \geqslant 0$; **3.** $\dfrac{\frac{1}{2}x-7}{8x+\frac{1}{3}} \leqslant 0$;

4. $\dfrac{x-4}{x+8} > -1$; **5.** $\dfrac{x+2}{x^2-1} \geqslant \dfrac{3}{x-1}$; **6.** $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+4} \geqslant 0$.

Indication 2.16. Pour les trois premières questions et la sixième, on peut directement faire un tableau de signes. Pour la troisième et la cinquième question, il faut déjà se ramener à une inéquation produit (on « met tout » du même côté, puis on écrit l'expression comme une seule fraction et enfin on fait un tableau de signes).

Exercice 2.17. On cherche à résoudre l'équation

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$$

d'inconnue x réelle.

1. Soit $x \neq 0$. Justifier que

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Soit $x \neq 0$. On pose $u = x + \dfrac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x.

3. Résoudre l'équation $x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$, d'inconnue x réelle.

Indication 2.17. **1.** Rapide.

2. Rapide.

3. Il faut faire un changement de variable (fortement sous-entendu avec les questions précédentes !).

Exercice 2.18. Pour tout m réel, on considère (E_m) l'équation $(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ d'inconnue réelle x.

1. Résoudre les équations (E_0) et (E_1).

2. Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 0$ comme solution ? Donner l' éventuelle autre solution.

3. Pour quelles valeurs de m, l'équation (E_m) admet-elle :

  (a) une unique solution ?

  (b) deux solutions distinctes ?

  (c) aucune solution réelle ?

Indication 2.18. **1.** Pour $m = 0$, on obtient deux solutions. Pour $m = 1$, on a une unique solution.

2. Il faut travailler par équivalence en commençant par traduire l'assertion « 0 est solution de (E_m) ». C'est une condition sur m qu'on veut obtenir dans cette question. Une fois qu'on a trouvé la valeur de m cherchée, on résout l'équation correspondante.
3. Attention, (E_m) n'est pas un trinôme pour toute valeur de m ! Lorsque (E_m) est un trinôme, on peut connaître le nombre de ses racines avec...

. . . .

Exercice 2.19. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $|x-3| = 5$; **2.** $|x-1| = |4+x|$; **3.** $|2x+1| = -3$;

4. $|x+2| \geqslant 3$; **5.** $|-7x+1| \leqslant 1$; **6.** $|4x+1| \geqslant |2x+1|$.

Indication 2.19. Il est directement écrit dans le cours comment résoudre les cinq premières questions. Pour la sixième, le plus simple est d'élever l'inéquation au carré (légitime car une valeur absolue est positive et la fonction carré est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

. . . .

Exercice 2.20. Soit m un réel fixé. Résoudre l'inéquation $|x-5| \leqslant m+3$ d'inconnue x réelle.

Indication 2.20. La méthode pour résoudre dépend du signe de $m+3$. Il faut donc traiter séparément les cas $m < -3$ et $m \geqslant -3$.

. . . .

Exercice 2.21. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle.

$$|2x-3| + |x+1| = 2.$$

Indication 2.21. Il faut simplifier les valeurs absolues en distinguant des cas. Ne soyez pas surpris du peu de solution à trouver !

. . . .

Exercice 2.22. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $\sqrt{x+3} = 2$; **2.** $2\sqrt{x+1} + 3 = 1$; **3.** $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 1$;

4. $\sqrt{x+3} \geqslant 2$; **5.** $\sqrt{2x+6} < 6$; **6.** $\sqrt{-x+2} \leqslant -1$;

7. $\sqrt{x+8} > 0$; **8.** $\sqrt{x^2+4x} \geqslant x+1$; **9.** $\sqrt{2-x} - \sqrt{6+3x} \geqslant 0$.

Indication 2.22. Attention, $a = b \Longleftrightarrow a^2 = b^2$ si et seulement si a et b sont de même signes ! (sinon le sens réciproque est faux). Pour certaines résolutions, il sera très utile de se rappeler le signe d'une racine carrée.

Pour la question **8.**, il est nécessaire de distinguer des cas avant d'élever au carré !

N'oubliez pas non plus de déterminer les ensembles de définition des équations/inéquations, et de bien vérifier que les solutions que vous obtenez appartiennent toutes à ces ensembles.

. . . .

Exercice 2.23. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle.

$$(E) : \quad \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1-x}} = 1.$$

Indication 2.23. Il y a plusieurs points sur lesquels il faut être vigilant :

- la recherche du domaine de définition doit être faite précisément (cela prend un peu de temps !)
- quand vous isolez une racine carrée et que vous vous ramenez à la forme $\sqrt{y} = a$, il faut que a soit positif pour pouvoir élever au carré et conserver les équivalences (cela peut amener à discuter suivant la valeur de a).
- il pourra être utile de poser $X = \sqrt{x}$ vers la fin de la résolution (ça n'est pas obligatoire, il y a aussi d'autres façons de faire !)

- il ne faut conserver que les solutions qui appartiennent au domaine de définition de l'équation (pour information, cette équation possède une unique solution.

Exercice 2.24. Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $x^4 + x^2 + x = x$; **2.** $\sqrt{x+3} = x + 2$; **3.** $\dfrac{2x+1}{x-1} \leqslant x + 1$.

Indication 2.24. Quand on peut factoriser, on le fait ! Pour résoudre une équation avec une racine carrée, on applique la méthode habituelle (on élève au carré si tout est positif, ce qui amène ici à distinguer des cas).

Exercice 2.25. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

1. $\sqrt{1-x^2} = 2x + 1$; **2.** $\sqrt{1-x^2} > 2x + 1$; **3.** $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 1$;

4. $|x-1| \leqslant |x-2|$; **5.** $|x-1| + |2x-7| + |x+3| < 6$; **6.** $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| > 3$.

Indication 2.25.

1. On distingue des cas suivant le signe de $2x + 1$, et on utilise l'équivalence suivante, vraie pour a, b positifs, $a^2 = b^2 \iff a = b$.
2. Même idée, en utilisant la stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$.
3. On peut montrer que l'inéquation n'admet pas de solution en minorant convenablement $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$.
4. On peut élever au carré, car tout est positif et la fonction carré est croissante sur $\mathbf{R}_+$!
5. Il faut chercher à simplifier $|x-1| + |2x-7| + |x+3|$ avant (il y a quatre expressions possibles en tout ; le plus simple est de s'aider d'un tableau).
6. On peut élever au carré (ou distinguer des cas suivant le signe de la valeur absolue).

Partie entière

Exercice 2.26. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

1. $\lfloor 3x - 1 \rfloor = 7$; **2.** $5\lfloor -4x + 1 \rfloor^2 = 9$; **3.** $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$.

Indication 2.26.

1. La méthode est dans le cours (on utilise la caractérisation donnée dans la définition).
2. Il faut se ramener à une équation (en fait deux !) du type de la question **1.** N'oubliez pas que la partie entière est un... entier !
3. Deux méthodes sont données dans le cours : soit par analyse/synthèse, soit en introduisant la partie fractionnaire, c'est-à-dire $\alpha \in [0\,;\,1[$ tel que $x = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

Exercice 2.27. Montrer que pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^\star$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Indication 2.27. Vous pouvez commencer par montrer que $n\lfloor x \rfloor \leqslant nx < n\lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 2.28. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1. $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5 - x \rfloor$. **2.** $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$. **3.** $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$.

Indication 2.28. Pour résoudre de telles équations, on peut procéder par analyse/synthèse.

- *Analyse.* On se donne x une solution du problème. A partir d'encadrements du type $\alpha - 1 < \lfloor \alpha \rfloor \leqslant \alpha$, on peut obtenir un encadrement de x : $x \in I$, avec I un intervalle borné.

- *Synthèse.* Soit $x \in I$. Il faut vérifier si x vérifie le problème initial. Par exemple, pour la question 1, il s'agit de déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5-x \rfloor$. Pour cet exemple, on doit obtenir, après la phase d'analyse, $x \in \left]\frac{4}{3}\,;\,2\right[$, donc $\lfloor 2x \rfloor \in \{3,4\}$. On peut commencer par résoudre $\lfloor 2x \rfloor = 3$ et $\lfloor 5-x \rfloor = 3$. Si ces deux équations ont des solutions communes, alors celles-ci sont solutions de $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5-x \rfloor$. Etc.
  On rappelle que, pour tout $(x,\alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor x \rfloor = \alpha \iff \alpha \leqslant x < \alpha + 1$.

Exercice 2.29. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

Indication 2.29. Il y a beaucoup de façons de faire. Une méthode consiste à introduire $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - \lfloor 2x \rfloor$, et à démontrer que cette fonction est périodique. Notons $T > 0$ une période de f. Il reste alors à montrer que pour $x \in [0\,;\,T[$, $f(x) = 0$.

Systèmes linéaires

Exercice 2.30. Résoudre les systèmes suivants où x, y, z sont des inconnues réelles.

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad (S_4)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 6z & = & -2 \\ x & + & 4y & + & 10z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\ \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 0 \\ 3x & - & 4y & = & 2 \\ -x & - & 2y & = & -2 \end{array}\right. \qquad (S_6)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Indication 2.30. Il faut appliquer la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 2.31. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Discuter, suivant les paramètres a, b et c, du nombre de solutions des systèmes suivants (d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$), puis résoudre ces systèmes.

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 4y & + & 5z & = & c \end{array}\right. \qquad (S_2)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & b \\ x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ & - & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Indication 2.31. Il faut appliquer la méthode du pivot de Gauss. Si vous avez une ligne $0 = f(a,b,c)$, où $f(a,b,c)$ est une expression qui dépend de a, b, c, alors il faut distinguer deux cas. Si $f(a,b,c) \neq 0$, alors le système est incompatible. Sinon, il l'est (et on continue la résolution comme habituellement).

Exercice 2.32. Soit $m \in \mathbf{R}$. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ ou $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} mx & + & y & = & 2m-1 \\ x & + & my & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & mz & = & m-1 \\ mx & + & y & - & mz & = & m^2-1 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & m+2 \\ x & + & my & = & m^2-m-3 \\ mx & - & y & = & m^2-2 \end{array}\right. \qquad (S_4)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & my & - & mz & = & m \\ 2x & + & 4y & - & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

Indication 2.32. Pivot de Gauss. On rappelle qu'il est interdit de choisir un pivot nul. Il faut donc retarder le plus possible le moment où l'on choisit un pivot qui dépend de m (il faut alors commencer une discussion, suivant que cette valeur est nulle ou non).

. . . .

Exercice 2.33 (*Écriture cartésienne d'un ensemble*). On considère l'ensemble

$$E = \left\{(x+y+3z, x+2y+4z, 3y+3z) \,:\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}.$$

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que (a,b,c) appartienne à E.
2. En déduire une autre écriture de E, sous la forme dite **cartésienne** suivante :

$$E = \left\{ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \cdots \right\}.$$

Indication 2.33. 1. Si $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$,

$$(a,b,c) \in E \iff \exists (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \begin{cases} x + y + 3z = a \\ x + 2y + 4z = b \\ \quad\; 3y + 3z = c \end{cases}$$

La question revient donc à chercher quand ce dernier système admet une solution, donc il faut trouver la condition de compatibilité de ce système.

2. Il suffit d'interpréter le résultat de la question précédente (il n'y a pas de nouveaux calculs).

. . . .

Exercice 2.34. Équilibrer les réactions chimiques suivantes :

1. $FeS_2 + O_2 \longrightarrow Fe_2O_3 + SO_2$
2. $C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$

Remarque : pour la première réaction, la question revient à trouver x, y, z et t des entiers tels qu'il y ait autant de chaque atome dans x FeS_2 + y O_2 que dans z Fe_2O_3 + t SO_2.

Indication 2.34. En comptant les atomes de fer, les atomes de soufre et d'oxygène, on obtient trois équations :

$$\begin{cases} 4x \qquad + \boxed{-1}\, z \qquad = 0 \\ 10x \qquad\qquad\quad - 2t = 0 \\ \qquad 2y - \quad 2z - \; t = 0 \end{cases}$$

Il reste à résoudre ce système, qui aura une infinité de solution, et à en choisir une pour laquelle x, y, z et t sont entiers.

. . . .

Exercice 2.35. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathscr{S}$.
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{S}$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathscr{S}$. Montrer que $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathscr{S}$ (on dit alors que $\mathscr{S}$ est **stable par addition**).
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{S}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in \mathscr{S}$ (on dit alors que $\mathscr{S}$ est **stable par produit externe**).

Indication 2.35. Il faut commencer par résoudre le système, puis vérifier que pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et u, v deux solutions du système, on a $u + v$ encore solution du système et λu encore solution du système.