TD 1 Logique, ensembles et raisonnements

Assertions et quantificateurs

Exercice 1.1. Les phrases suivantes sont-elles vraies pour toutes les assertions A et B ?

1. Si (A et B) est vraie alors (A ou B) est vraie.
2. Si (A ou B) est vraie alors (A et B) est vraie.
3. Si A est fausse et si A implique B alors B est fausse.
4. Si B est fausse et si A implique B alors A est fausse.

Indication 1.1. Vous pouvez utiliser des tables de vérité (ou un contre-exemple pour les assertions fausses, c'est plus rapide !).

Exercice 1.2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, E et E' des parties de $\mathbf{R}$. Écrire les négations des propositions suivantes.

1. $x = 0$ ou $y = 1$.
2. $(x^2 = 1) \Longrightarrow x = 1$.
3. $1 \leqslant x < y$.
4. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ \Big((x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\Big)$.

Indication 1.2. Rien à signaler : les négations des connecteurs logiques et des quantificateurs sont dans le cours.

Exercice 1.3. Pour chacun des énoncés suivants, donner tout d'abord la valeur de vérité, puis donner la négation.

1. Tout multiple de 5 est un multiple de 3.
2. Le successeur d'un nombre pair est un nombre premier.
3. Le quotient de deux suites de termes strictement positifs qui convergent vers 0 est une suite qui converge vers 0.

Indication 1.3. Toutes les affirmations sont fausses : il faut donc trouver des contre-exemples.

Exercice 1.4. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$. On dit que f est une fonction majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leqslant M$.

1. Comment traduire graphiquement le fait que f soit une fonction majorée ?
2. Écrire au moyen de quantificateurs l'assertion « f est une fonction majorée », puis l'assertion « f n'est pas une fonction majorée ».
3. On ne suppose pas nécessairement f majorée. Quelle est la valeur de vérité de l'assertion « pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) \leqslant M$ » ?

Indication 1.4.
1. Rien à signaler.
2. Il faut simplement traduire la phrase avec $\forall$ et $\exists$. Ensuite il faut nier l'assertion logique comme vu dans le cours.
3. L'assertion est toujours vraie. Essayez d'expliquer pourquoi.

Exercice 1.5. On dit qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est un intervalle lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$ tel que $x \leqslant y$, pour tout $z \in \mathbf{R}$, si $z \in [x\,;\,y]$ alors $z \in A$.
Les parties de $\mathbf{R}$ suivantes sont-elles des intervalles ? Justifier votre réponse.

1. $[0\,;\,1]$; **2.** $\mathbf{R}_-^\star$; **3.** $\mathbf{R}^\star$.

Indication 1.5. La définition d'intervalle peut se comprendre ainsi : c'est une partie de $\mathbf{R}$ « sans trou ».

. . . .

Exercice 1.6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\exists x \in \mathbf{Z},\ \exists y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.

2. $\exists x \in \mathbf{Z},\ \forall y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.

3. $\forall x \in \mathbf{Z},\ \exists y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.

4. $\forall x \in \mathbf{Z},\ \forall y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.

Indication 1.6. Si vous voulez démontrer qu'une assertion est fausse, vous pouvez d'abord écrire sa négation pour mieux comprendre comment procéder.

. . . .

Exercice 1.7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Reconnaître les propriétés des fonctions f décrites ci-après.

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$;

2. $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$ (on pourra écrire la négation) ;

3. $\forall x \in I,\ \big(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big)$.

Indication 1.7. Rien à signaler.

. . . .

Exercice 1.8. On note $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1. Donner la négation des propositions suivantes.

   (a) $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\quad (\ x^2 = y^2 \implies x = y\ )$;

   (b) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ (\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\ )$;

   (c) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall x' \in \mathbf{R},\ (\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\ )$;

   (d) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R},\quad (\ x > 0 \implies f(x) > 0\ )$.

2. Montrer que toutes les propositions précédentes sont fausses.

Indication 1.8. **1.** Vous pouvez aller voir dans le cours comment nier un $\forall$, un $\exists$ et une implication !

2. Il faut montrer que les négations sont vraies, et chercher des contre-exemples.

   (a) Vous pouvez considérer des nombres x et y de signes différents.

   (b) L'assertion signifie que f est croissante, donc n'importe quelle fonction décroissante non constante constituera un contre-exemple efficace.

   (c) Vous pouvez considérer la fonction carré.

   (d) L'assertion signifie que f est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^\star$. N'importe quelle fonction qui ne vérifie pas cette propriété sera un bon contre exemple.

. . . .

Exercice 1.9. On rappelle l'énoncé suivant :

> « Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un ensemble I. On suppose que I est un intervalle et que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Alors f est une fonction croissante. »

1. Identifier clairement les hypothèses et la conclusion de cette proposition, puis montrer à l'aide de contre-exemples que chacune des deux hypothèses est essentielle.

2. « f est dérivable sur I et $f' \geqslant 0$ » est-elle une condition nécessaire pour que f soit une fonction croissante ? Est-ce une condition suffisante ?

Indication 1.9. **1.** Pour montrer la nécessité des hypothèses, vous pourrez considérer la fonction inverse et la fonction f définie par $f(x) = -x$.

2. Une des deux assertions est l'énoncé du théorème, l'autre est fausse (vous pourrez considérer la fonction f non continue définie par $f(x) = x$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = x + 1$ si $x > 0$, et vous rappeler qu'une fonction non continue ne peut pas être dérivable).

. . . .

Exercice 1.10. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
2. Pour qu'un nombre entier soit supérieur ou égal à 4, il faut qu'il soit strictement supérieur à 3.
3. Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

Indication 1.10. Rien à signaler. Pensez à présenter un contre-exemple si l'assertion est fausse.

. . . .

Exercice 1.11. Donner la contraposée des implications suivantes :

1. Soit x un nombre réel. Si x est supérieur à 3, alors $2x$ est supérieur à 5.
2. Si je dors, je ne suis pas éveillé.

Indication 1.11. Les deux assertions sont des implications du type $P \implies Q$ (l'exercice revient alors à bien identifier P et Q).

Ensembles

. . . .

Exercice 1.12. Écrire à l'aide des symboles $\cap$, $\cup$, et d'ensembles écrits en compréhension les ensembles suivants.

1. A, l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 et pairs.
2. B, l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 ou de 9.
3. C, l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 ou de 9, et pairs.

Indication 1.12. Vous pouvez écrire pour commencer l'ensemble des multiples de 7 (resp. 9, resp. 2) : $\{\ldots : k \in \mathbf{Z}\}$.

. . . .

Exercice 1.13. Compléter :

1. $\{3k + 2 : k \in \mathbf{N}\} = \{n \in \mathbf{Z} \mid \ldots\}$.
2. $\{\ldots : k \in \mathbf{N}\} = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{Z},\ n = 7k - 2\}$.

Indication 1.13. Rien de particulier, le passage de l'une à l'autre des formes est expliqué dans le cours.

. . . .

Exercice 1.14. **1.** Écrire sous la forme d'une réunion infinie d'ensembles la partie $A = \mathbf{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

2. Déterminer B tel que l'on ait $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}}]n \,;\, n+1[= \mathbf{R} \backslash B$.

Indication 1.14. Vous pouvez faire un dessin si cela vous aide.

. . . .

Exercice 1.15. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.

Indication 1.15. Travailler par double implication. Une implication est évidente. Pour l'autre, on doit démontrer une égalité d'ensemble : travailler par double inclusion.

Types de raisonnements

. . . .

Exercice 1.16. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$n \text{ est premier } \implies (n = 2 \text{ ou } n \text{ est impair.})$$

Indication 1.16. Vous pouvez démontrer l'implication par contraposition.

. . . .

Exercice 1.17. Montrer que les assertions suivantes sont vraies.

1. Si une somme de n termes positifs ou nuls est nulle, alors chacun de ses termes est nul.

2. Si le produit de n facteurs est non nul, alors chacun de ses facteurs est non nul.

3. Si une somme de six nombres réels vaut 60, alors au moins un de ces six nombres est supérieur ou égal à 10 et il existe trois de ces six nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Indication 1.17. Vous pouvez commencer par écrire toutes les assertions en langage mathématiques (ce sont toutes des implications). On les démontre ensuite par contraposition (vous pouvez donner une explication en français pour les questions **1.** et **2.** qui explique pourquoi la contraposée est vraie).

. . . .

Exercice 1.18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n(n^2+1)$ est un entier pair.

Indication 1.18. On pourra distinguer des cas suivant la parité de n. On rappelle que si n est pair, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k$. Donc il faut montrer que le nombre

$$n(n^2+1) = 2k((2k)^2+1)$$

est pair. Pour démontrer qu'un nombre est pair, il faut chercher à le factoriser par 2.
Si n est impair, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k+1$.

. . . .

Exercice 1.19. Montrer que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est un multiple de 3 (cela signifie qu'il existe un entier k tel que $n^3 - n = 3k$).

Indication 1.19. Disjonction de cas (trois cas, suivant le reste de la division de n par 3, qui peut être égal à 0, 1 ou 2) ou récurrence.

. . . .

Exercice 1.20. Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n+1$ chaussettes sont rangées dans n tiroirs. Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 chaussettes.

Indication 1.20. Raisonnement par l'absurde.

. . . .

Exercice 1.21. **1.** Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est un multiple de 3 alors n est aussi un multiple de 3.

2. Montrer que $\sqrt{3}$ est un irrationnel en raisonnant par l'absurde.

Indication 1.21. Cet exercice ressemble beaucoup à la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$! Si n n'est pas multiple de 3, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$...

. . . .

Exercice 1.22. Montrer que si $n \neq 0$ est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Indication 1.22. Raisonnement par l'absurde.

. . . .

Exercice 1.23. On considère les parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes :

$$F = \left\{ (u,v) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; u+v=0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{(t,t) \,:\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ se décompose de manière unique comme la somme d'un couple de F et d'un couple de G.

1. On suppose qu'il existe une solution au problème, à savoir que pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ fixé, il existe un couple $(u, v) \in F$ et un couple $(t, t) \in G$ tels que $(x, y) = (u, v) + (t, t)$.
   En utilisant la définition de F, déterminer t en fonction de x et y.
2. En déduire u et v en fonction de x et y.
3. Quel type de raisonnement a-t-on commencé à mettre en place ici ? Terminer l'exercice !

Indication 1.23. 1. Dans la définition de F, on ajoute les coordonnées. Vous pouvez donc calculer $x + y$ et voir ce que cela donne !
2. Il faut utiliser $(x, y) = (u, v) + (t, t)$ et le résultat de la question précédente.
3. Dans quel type de raisonnement commence t-on par supposer que le problème que l'on se pose admet une solution ?

. . . .

Exercice 1.24. On considère les parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes :

$$F = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; u - 2v = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{(t, 0) \,:\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Montrer que tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se décompose de manière unique comme la somme d'un couple de F et d'un couple de G.

Indication 1.24. C'est un problème d'existence et d'unicité, quel type de raisonnement est-il adapté ?

. . . .

Exercice 1.25. Montrer qu'il existe un unique nombre réel x tel que, pour tout nombre réel ε strictement positif, $|x| < \varepsilon$.

Indication 1.25. Une analyse/synthèse est possible : on montre que 0 est le seul candidat solution possible (pour cela, vous pouvez choisir ε de manière astucieuse !) Ensuite, il reste simplement à vérifier que 0 convient.

. . . .

Exercice 1.26. L'objectif de l'exercice est de déterminer les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y. \tag{1.1}$$

1. On suppose qu'il existe une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant (1.1).
   (a) Montrer que $f(0) = 1$.
   (b) En déduire l'expression de f.
2. Conclure en précisant soigneusement le raisonnement utilisé.

Indication 1.26. 1. (a) Vous pouvez choisir des valeurs pour x et y qui vous arrangent dans la relation (1.1).
(b) On demande l'expression de f, c'est-à-dire $f(x)$. Vous pouvez conserver x et choisir une valeur de y qui vous arrange dans la relation (1.1).
2. Une fois le type de raisonnement identifié, vous constaterez qu'il reste une étape (facile) à faire avant de conclure.

. . . .

Exercice 1.27. Montrer à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse que toute fonction f réelle définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction g dont la dérivée s'annule en 0 et d'une fonction linéaire h (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = ax$)

Indication 1.27. Analyse/synthèse. Pour la phase d'analyse, il faut se donner g une fonction dérivable qui s'annule en 0 et h définie par $h(x) = ax$ telles que $f(x) = g(x) + ax$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Vous pouvez commencer par déterminer a, puis ensuite démontrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $g(x) = f(x) - a + k$ pour enfin obtenir que $g(x) = f(x) - ax$.

Récurrences

. . . .

Exercice 1.28. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n}. \tag{1.2}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1$.

Indication 1.28. Récurrence simple.

. . . .

Exercice 1.29. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 6 - 2u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-2)^{n+1} + 2$.

Indication 1.29. Récurrence. Pour l'hérédité, il faut « regrouper » les puissances de 2 ensemble.

. . . .

Exercice 1.30. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \tag{1.3}$$

Trouver une formule exprimant le terme général u_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$, puis la démontrer par récurrence.

Indication 1.30. Il faut calculer les premiers termes pour conjecturer une formule :

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}, \ldots$$

On conjecture donc que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Il faut ensuite montrer votre conjecture par récurrence.

. . . .

Exercice 1.31. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1.$$

Indication 1.31. En notant H_n la proposition « $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$ », faire bien attention que H_{n+1} est la proposition « $u_{2n+2} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+3} = -1$ ».

. . . .

Exercice 1.32. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Indication 1.32. Récurrence. Dans la phase d'hérédité, vous pouvez factoriser ce qui peut l'être par 17. Le terme restant est factorisable par 17 via l'hypothèse de récurrence.

. . . .

Exercice 1.33. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

Indication 1.33. Récurrence double. Dans l'hérédité, il faut « regrouper » les puissances de 2 entre elles ; de même avec les puissances de 3.

. . . .

Exercice 1.34. On considère la suite u définie par la donnée de ses premiers termes $u_0 = 3$, $u_1 = 5$, et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 12u_n.$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2 \times 4^n + (-3)^n.$$

Indication 1.34. Récurrence double. Dans l'hérédité, il faut « regrouper » les puissances de 4 entre elles ; de même avec les puissances de -3.

. . . .

Exercice 1.35. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de réels définie par la donnée de ses trois premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \tag{1.4}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = n(n-1)$.

Indication 1.35. Récurrence triple.

. . . .

Exercice 1.36. On définit la suite u par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Indication 1.36. Récurrence forte. On rappelle que $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

. . . .

Exercice 1.37. En utilisant un raisonnement de récurrence forte, montrer que pour tout n entier naturel non nul, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tel que $n = 2^p(2q + 1)$.

Indication 1.37. Récurrence forte. Pour la phase d'hérédité, vous pourrez distinguer des cas suivant la parité de $n+1$.