TD 38 — Fonctions de deux variables réelles

Généralités

Exercice 38.1. Représenter dans le plan les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f : (x, y) \longmapsto x + y - 1$; **2.** $g : (x, y) \longmapsto \mathrm{e}^{y-x^2}$; **3.** $h : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

Calculs de dérivées

Exercice 38.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + (x - y)\cos(x^2 + y^2).$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

1. Calculer ses dérivées partielles premières en tout point.

2. Déterminer une équation du plan tangent en $(0, 0, f(0, 0))$.

Exercice 38.3. Soit f et g deux fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Calculer les dérivées partielles par rapport à x et y des fonctions de deux variables :

1. $\gamma : (x, y) \longmapsto f(x)$; **2.** $\xi : (x, y) \longmapsto g(y)$; **3.** $\chi : (x, y) \longmapsto f(x) + g(y)$.

Exercice 38.4. Calculer les dérivées partielles de la fonction f suivante en tout point.

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}.$$

Exercice 38.5. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. On considère de plus les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(t, t^2) \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x + y, x - y) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(\exp(x) - y^2, y - 1) \end{array}$$

Calculer les dérivées premières de g, h et k en fonction de celles de f.

Points critiques et extrema

Exercice 38.6. Déterminer les extrema locaux des fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ suivantes.

1. $f : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$; **2.** $g : (x, y) \longmapsto (x - y)^2 + (x + y)^3$.

Exercice 38.7. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x\mathrm{e}^{x(y^2+1)} \end{array}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

2. Déterminer le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local. On notera A ce point.

3. **(a)** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) \geqslant x\mathrm{e}^x$.

(b) En déduire que A est un extremum global de f sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 38.8. **1.** On considère la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x)+2x+1 \end{array}$$

Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

2. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x(\ln(x)+x+y^2) \end{array}$$

(a) Déterminer le seul point critique x_0 de f.

(b) Montrer que $f(x_0) = -\alpha(\alpha+1)$.

Exercice 38.9. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}_+^\star$ par :

$$\forall (x,y) \in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[, \quad f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que, pour tout couple $(x,y) \in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy} \quad \text{et} \quad f(x) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4. **(a)** Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

(b) En déduire que f admet sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

5. Démontrer que

$$\forall (x,y) \in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[, \quad 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y) \geqslant 2\ln(2).$$

Équation aux dérivées partielles

Exercice 38.10. On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(E): \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

d'inconnue la fonction f définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour cela, on posera le changement de variable

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

1. Soit f une fonction solution de (E). On considère la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longrightarrow & f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right). \end{array}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = g(x+y, x-y).$$

(a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

(b) Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g.

(c) Démontrer que pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $2\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v)$.

(d) En déduire l'expression de g, puis l'expression de f.

2. Réciproquement, vérifier que toute fonction f de la forme obtenue à la question précédente est bien solution de (E) et conclure.