TD 37 Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire, norme

Exercice 37.1. Dans chacun des cas suivants, décider si l'application φ introduite est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E :

1. $E = \mathbf{R}_2[X]$ et pour tous $P, Q \in E$,
$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

2. $E = \mathbf{R}_n[X]$, $x_0, \ldots, x_n$ sont des nombres réels deux à deux distincts et pour tous $P, Q \in E$,
$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k).$$

3. $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et pour tous $f, g \in E$,
$$\varphi(f,g) = \int_0^1 (1-t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et pour tous $f, g \in E$,
$$\varphi(f,g) = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 37.2. **1.** Soit E un espace préhilbertien et f un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$ **(ii)** $\forall x, y \in E, \quad < f(x), f(y) >=< x, y >$.

2. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E vérifiant pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 37.3. Soit E un espace préhilbertien.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$,
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$
Pourquoi cette égalité est-elle appelée identité du parallélogramme ?

2. En déduire que pour tous $x, y, z \in E$,
$$\|x-z\|^2 \leqslant 2\left(\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2\right).$$

3. Soit $x, y \in E$. Montrer que
$$\|x\| = \|y\| \iff (x+y) \perp (x-y) \qquad\qquad x \perp y \iff \|x+y\| = \|x-y\|$$
Quelles sont les interprétations géométriques de ces propriétés ?

Exercice 37.4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

Exercice 37.5. Soit $x_1, \ldots, x_n$ n nombres réels strictement positifs tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2.$$
Examiner le cas d'égalité.

Exercice 37.6. Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\ln b - \ln a \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Familles orthogonales, orthonormales

Exercice 37.7. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & 3xx' + xy' + yx' + yy'. \end{array}$$

Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}^2$ pour ce produit scalaire.

Exercice 37.8. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 = (1,1,0), \qquad e_2 = (1,0,1) \quad \text{et} \quad e_3 = (0,1,1).$$

Exercice 37.9. On munit l'espace $\mathscr{C}^0([-1\,;\,1], \mathbf{R})$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Orthonormaliser dans cet espace préhilbertien la famille

$$(t \longmapsto 1,\ t \longmapsto t,\ t \longmapsto \exp(-t)).$$

Exercice 37.10. Pour tous $A, B \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose $\langle A, B \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} A(x)B(x)(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Construire une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Orthogonal d'une partie

Exercice 37.11. On considère $E = \mathbf{R}_2[X]$, muni de l'application définie par $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_1[X]$ et celui de $\mathrm{Vect}\,(X)$ dans E muni de ce produit scalaire.

Exercice 37.12. Munissons l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbf{R})$ du produit scalaire usuel. Introduisons le sous-espace vectoriel de E défini par

$$H = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}.$$

1. Soit $f \in H^\perp$. À l'aide de la fonction $g : t \longmapsto t f(t)$, montrer que f est nulle.
2. En déduire $H^\perp$ et $H^{\perp\perp}$.

Exercice 37.13. Soit E un espace préhilbertien. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$F^\perp \cap F = \{0\} \qquad F \subset F^{\perp\perp} \qquad F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp \qquad (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

Exercice 37.14. On définit la trace d'une matrice carrée A, notée $\mathrm{tr}(A)$, comme la somme des coefficients de sa diagonale principale. On définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}(A^T B) \end{array}$$

1. Montrer l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est linéaire et que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$.
2. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Prouver que f est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien et montrer que la base canonique en est une base orthonormale.

5. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
$$\operatorname{tr}(A)^2 \leqslant n \operatorname{tr}(A^T A).$$

6. Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Projection orthogonale

Exercice 37.15. On travaille dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On introduit l'espace vectoriel
$$A = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0 \right\}.$$
On note p la projection orthogonale sur A.

1. Déterminer la matrice représentant p dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

2. Déterminer la distance du vecteur $v = (-3, 1, 0, 2)$ à A.

Exercice 37.16. **1.** Montrer que l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ ((x,y,z),(x',y',z')) & \longmapsto & xx' + xy' + yx' + 2yy' + 2yz' + 2zy' + 5zz' \end{array}$$
est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

2. Notons P le plan d'équation $z = 0$. Déterminer l'expression de la projection orthogonale (relativement au produit scalaire f) de $\mathbf{R}^3$ sur P.

Exercice 37.17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Montrer que f est une projection orthogonale ($\mathbf{R}^3$ est bien sûr muni du produit scalaire canonique) sur un plan P que l'on précisera.

Exercice 37.18. **1.** Montrer que l'application $u : (P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ munit $\mathbf{R}_2[X]$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

3. En déduire
$$\min\left(\left\{\int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t \;:\; a, b \in \mathbf{R}\right\}\right).$$

Exercice 37.19. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$. Pour tout $f, g \in E$, on pose
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
On admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

1. Justifier que pour $f, g \in E$, $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Rappeler les formules donnant la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.

3. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on définit les fonctions f_k et g_k par :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f_k(x) = \cos(kx) \text{ et } g_k(x) = \sin(kx)$$
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est orthonormale.

4. Que peut-on dire de la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$?

5. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par cos et $f : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u = \sin^2$.

Exercice 37.20. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme f de E est autoadjoint si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

1. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E.

  (a) Montrer que la matrice représentant f dans une base orthonormale de E est une matrice symétrique.

  (b) Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est l'orthogonal de $\operatorname{Ker}(f)$.

2. Soit p un endomorphisme de E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $p^2 = p$ et p est autoadjoint.