

TD 36

INTÉGRATION SUR UN
SEGMENT

Généralités

Exercice 36.1. Sans les calculer, comparer les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx.$$

Exercice 36.2. Donner un exemple de fonction en escalier positive sur $[0; 1]$, non nulle, et dont l'intégrale sur $[0; 1]$ est nulle.

Exercice 36.3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 36.4. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 36.5. On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R})$ telles que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

1. Soit $f \in E$. Calculer

$$\int_0^1 (f - f^2)^2.$$

2. Conclure.

Exercice 36.6. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$ si, et seulement si, $f \geq 0$ ou $f \leq 0$.

Exercice 36.7. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 36.8. Montrer que pour tout nombre réel x ,

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 36.9. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$.

Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$.

Suites ou fonctions définies avec des intégrales

Exercice 36.10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x) dx$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq c^n$ où $c \in [0; 1[$ est une constante à déterminer. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 36.11. 1. Montrer que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est définie sur $\mathbf{R}^*$.
3. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right]$. Encadrer l'expression $\frac{\cos(t)}{t}$ pour tout $t \in [x; 2x]$ et en déduire un encadrement de $f(x)$.
4. Prouver que f admet une limite finie à droite en 0 que l'on déterminera.
5. Que peut-on dire concernant la limite à gauche en 0 de f ?

Exercice 36.12. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_a^b g(t) \cos(nt) dt$ est une suite bornée.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ converge vers 0. On pourra utiliser la question précédente après avoir fait une intégration par parties.

Exercice 36.13. Déterminer le domaine de définition et donner un équivalent simple en $+\infty$ de

$$F : x \mapsto \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt.$$

Exercice 36.14. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

1. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbf{R}_+$
2. Montrer que f est dérivable et exprimer f' .
3. En étudiant les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction

$$\varphi : x \mapsto 2xe^{x^2-x^4} - 1,$$

dresser le tableau des variations de f . On placera en particulier le point d'abscisse 1 dans ce tableau.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 36.15. On pose pour tout réel x non nul, $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. Vérifier que f est effectivement définie sur $]0, +\infty[$.
2. Vérifier que f est paire.
3. Vérifier que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.
4. (a) Rechercher la limite éventuelle de f en $+\infty$.
- (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{x^2 + t^2} dt$. En déduire la limite éventuelle de f à droite en 0.
5. Donner l'allure de la représentation graphique de f .

Exercice 36.16. Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction F ainsi définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est dérivable et déterminer F' . En déduire une expression plus simple de F .
2. Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 36.17. Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

1. Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer g' . On pourra utiliser la formule d'addition du sinus.
2. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, puis vérifier que

$$g'' + g = f.$$

3. En déduire l'ensemble des fonctions numériques solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = f.$$

Exercice 36.18. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

1. Calculer J_1 .
2. Déterminer la limite de (J_n) .
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
5. Donner un équivalent de (I_n) .

Exercice 36.19. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e t^2 (\ln t)^n dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer la limite de la suite (I_n) .
4. Donner un équivalent de la suite (I_n) .

Exercice 36.20. Soit H la fonction définie par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Prouver que la fonction H est définie sur $I =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in I$, déterminer le signe de $H(x)$.
3. Étudier les limites de H en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\frac{H(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \frac{H(x)}{x}.$$

5. Calculer pour tout $x > 1$,

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}.$$

6. En déduire que H admet une limite en 1^+ et la déterminer.
7. Adapter le raisonnement précédent pour prouver que H admet une limite en 1^- et la déterminer.
8. En déduire que H est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}_+$. On note encore H ce prolongement.
9. En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.
10. Dresser le tableau des variations de la fonction H .

Exercice 36.21. Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$.

On définit la fonction F sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x).$$

Justifier que F est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire une égalité. Interpréter géométriquement ce résultat.

Sommes de Riemann

Exercice 36.22. Étudier la limite éventuelle des suites dont les termes généraux sont donnés après.

$$1. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}};$$

$$2. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2};$$

$$3. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3};$$

$$4. \quad u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}};$$

$$5. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}};$$

$$6. \quad u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right);$$

$$7. \quad u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2};$$

$$8. \quad u_n = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \dots + \sqrt[n]{2^n});$$

$$9. \quad u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}.$$

Exercice 36.23. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$w_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 36.24. Déterminer des équivalents des suites dont les termes généraux sont donnés après.

$$1. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k};$$

$$2. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}};$$

$$3. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$