TD 35

ESPÉRANCE ET VARIANCE

Espérance, variance, écart-type

Exercice 35.1. On lance trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de « Faces » obtenues. Donner la loi de X , puis $\mathbb{E}(X)$ et enfin $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 35.2. On joue au jeu suivant : on lance trois dés non pipés : si le six n'est pas sorti, on perd un euro, s'il sort une, deux ou trois fois, on gagne respectivement un, deux, ou trois euros. Notons Y le nombre de six obtenus et X la variable aléatoire représentant le gain après une partie.

1. Donner la loi de Y , puis son espérance.
2. Déterminer la loi de X , puis son espérance. Le jeu est-il favorable ?

Exercice 35.3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 3, 6 \rrbracket)$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X , puis l'espérance et la variance de Y et enfin la loi de Y .

Exercice 35.4. Perspicouac organise une loterie. Il vend 50 billets à 1 euro chacun, puis il choisit au hasard (de manière équiprobable) un billet. Le détenteur du billet en question gagne alors l'équivalent de 35 euros (c'est le prix de la bicyclette achetée en solde pour l'occasion).

1. Pticachou achète un billet. On note T son gain. Donner l'espérance et la variance de T .
2. Si Pticachou avait acheté deux billets, quel aurait été l'espérance et la variance de son gain, que vous pourriez cette fois noter T ?

Exercice 35.5. On choisit au hasard deux nombres entiers (éventuellement égaux) dans l'intervalle $[-2; 2]$, les couples de nombres étant équiprobables. On note X le produit des deux nombres choisis. Déterminer la loi de X . Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 35.6. Une variable aléatoire S obéit à une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Elle a pour espérance 6, et pour variance 3,6. Quelles sont les valeurs de n et p ?

Exercice 35.7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, telle qu'il existe un nombre réel strictement positif a pour lequel :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a \binom{n}{k}}{k + 1}.$$

1. Calculer a .
2. Calculer l'espérance et la variance de X . On pourra commencer par calculer $\mathbb{E}(X + 1)$ et $\mathbb{E}(X(X + 1))$.

Exercice 35.8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$.
2. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs, indépendants. Lorsque le joueur commence un niveau (ce qui suppose qu'il ait réussi les niveaux précédents), la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.
 - (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X , et calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X \geq k)$.
 - (b) En déduire que $\mathbb{E}(X) = 2 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Exercice 35.9. À force de chercher qui est x , un professeur de mathématiques devient fou. Il décide alors de noter au hasard, et indépendamment les unes des autres, n copies (mais d'ailleurs, qui est n ?) en accordant une égale probabilité à toutes les notes entières possibles de 0 à 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Pour $k \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(X_n \leq k)$ et en déduire $\mathbb{P}(X_n = k)$. Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.
2. Démontrer que $\mathbb{E}(X_n) = 20 - \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{k+1}{21}\right)^n$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 35.10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n , on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et l'on effectue alors un second tirage.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premier et second tirages.

1. Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 en fonction de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et démontrer que l'on a

$$2\mathbb{E}(X_2) = 1 - n + (3n + 1)S_n.$$

Exercice 35.11. On lance 6 dés idéaux. On note X le nombre de multiples de 3 obtenus.

1. Déterminer la loi de X . Préciser son espérance et son écart-type.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux multiples de 3 sachant qu'on en a obtenu au plus quatre.

Exercice 35.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de « pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ (« pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n . On suppose que les déplacements du mobile sont indépendants.

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n . Démontrer que $X_n = 2D_n - n$ et en déduire, grâce à la loi de D_n , celle de X_n .
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n .
4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée? Interpréter.

Exercice 35.13. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X+1}$.

Exercice 35.14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra utiliser la formule suivante sans la démontrer : $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Une urne contient $n-2$ boules rouges numérotées de 1 à $n-2$ et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une et sans remise de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche, et Y celle correspondant au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_i l'événement « la i -ème boule tirée est blanche ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Exprimer l'événement $(X = k)$ à l'aide de $B_1, \dots, B_n$, puis montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
3. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{3}$. Calculer $\mathbb{V}(X)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ où Z est le nombre de boules rouges restant dans l'urne lorsque la première boule blanche vient d'être tirée.
5. Déterminer la loi de Y .

Exercice 35.15. Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard une poignée de jetons de cette urne. Notons X la somme des points obtenus, et Y le nombre de jetons de la poignée tirée. On suppose que Y est une variable aléatoire uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$, et on convient que si Y prend la valeur 0, alors X prend la valeur 0.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la variable aléatoire X_k en posant : $X_k = k$ si le jeton k est dans la poignée tirée, $X_k = 0$ sinon. Justifier que $X = \sum_{k=1}^n X_k$.

Exercice 35.22. Soit $c \in \mathbf{N}$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur et la remet dans l'urne avec c autres boules de la même couleur, c étant un entier strictement positif. On répète n fois ce tirage suivant le même principe, n étant un entier supérieur ou égal à 2. On considère les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies par : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i -ième tirage ;
- $X_i = 0$ sinon.

On définit également pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable aléatoire Z_p par $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$.

1. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Que représente Z_p ? Déterminer $Z_p(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 et son espérance.
4. Déterminer la loi de Z_2 .
5. Soit $p \leq n - 1$.
 - (a) Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k)$ pour tout $k \in Z_p(\Omega)$.
 - (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c \mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}$.
 - (c) En déduire que $X_p \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On raisonnera par récurrence en considérant la propriété H_p : « les variables aléatoires $X_1, \dots, X_p$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ ». On calculera lors de l'hérédité $\mathbb{E}(Z_p)$.

Inégalités probabilistes

Exercice 35.23. Un exploitant agricole possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables, qui contiennent chacune n places ($50 \leq n \leq 100$).

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de vaches qui choisissent l'étable numéro 1.

1. Donner la loi de X , ainsi que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Notons E l'événement « chaque vache trouve une place ». Exprimer E à l'aide de X .
3. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place, avec une probabilité supérieure à 95%.

Exercice 35.24. Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse. On souhaite estimer une valeur approchée de p .

Pour cela, on prélève n pièces. On suppose que la population des pièces est suffisamment grande pour que le prélèvement puisse être modélisé par une suite de n tirages successifs avec remise. On note X_n le nombre de pièces défectueuses obtenues.

1. Quelle est la loi de X_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Exercice 35.25 (Inégalité de Cantelli). Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\{X - \mathbb{E}(X) \geq a\} \subset \{(X - \mathbb{E}(X) + t)^2 \geq (a + t)^2\}$.
2. En considérant la variable $X - \mathbb{E}(X) + t$, montrer que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + \mathbb{V}(X)}{(a + t)^2}$.
3. Déterminer en quelle valeur le minimum de la fonction suivante est atteint : $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$
 $t \mapsto \frac{t^2 + \mathbb{V}(X)}{(a + t)^2}$
4. En déduire l'inégalité de Cantelli : $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2 + \mathbb{V}(X)}$.
5. Comparer l'information donnée par cette inégalité à celle donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
6. Déduire de 4. l'inégalité suivante : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{2\mathbb{V}(X)}{a^2 + \mathbb{V}(X)}$.
7. À nouveau, étudier l'intérêt de cette inégalité, en particulier par rapport à celle de Bienaymé-Tchebychev.