TD 34

CONDITIONNEMENT ET
INDÉPENDANCE

Probabilités conditionnelles

Exercice 34.1. On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité d'obtenir les 4 as.
2. Un joueur dévoile deux cartes de son jeu et ce sont des as. Calculer la probabilité qu'il détienne les 4 as.

Exercice 34.2. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse est $p \in]0; 1[$.

Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Exercice 34.3. On dispose de trois cartes : l'une a deux faces noires, une autre deux faces blanches, et la troisième une face noire et une face blanche. On tire une carte au hasard et sans la regarder, on la pose sur la table (les deux faces ont la même probabilité d'être visibles). La face observée est noire. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ?

Exercice 34.4 (Problème de Monty Hall). On dispose de trois verres opaques. Le meneur du jeu a caché dix euros sous l'un de ces verres. Le joueur désigne un des trois verres.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait désigné le verre cachant l'argent ?
2. Parmi les deux verres non désignés, le meneur du jeu écarte alors un verre qu'il sait vide. Le joueur peut alors décider de modifier son choix. Que lui conseillez-vous ?

Exercice 34.5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout k compris entre 1 et n , le sac S_k contient k jetons blancs et $(n + 1 - k)$ jetons mauves.

On choisit un sac de sorte que la probabilité de choisir le sac S_k soit égale à αk pour tout k compris entre 1 et n , ce après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α de sorte à ce que le problème soit bien posé.
2. Le jeton pioché est mauve. Exprimer en fonction de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k . Simplifier au maximum l'expression obtenue.

Exercice 34.6. Une urne contient cinq boules blanches et sept rouges. On effectue trois tirages d'une boule suivant la procédure suivante : à chaque tirage, on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités d'obtenir :

1. aucune boule blanche ;
2. exactement une boule blanche ;
3. trois boules blanches ;
4. exactement deux boules blanches.

Exercice 34.7. M. Kiboitro, gardien de son état, possède un trousseau de n clés. Dans l'entreprise où il travaille, une nuit, il arrive devant la porte d'une salle où la lumière est restée allumée. Il veut éteindre la lumière, il sait qu'une seule des n clés de son trousseau peut ouvrir cette porte, mais il ne sait plus laquelle.

1. 1er cas : M. Kiboitro est ivre mort. Pour ouvrir la porte, il essaie les clés au hasard une à une, mais comme il a trop bu, il ne met pas à l'écart les clés qu'il a déjà essayées. Il s'autorise au plus n essais (il arrive encore à compter malgré son état). On note X la variable aléatoire égale à 0 s'il n'a pas réussi à ouvrir la porte et qui vaut k s'il a réussi à ouvrir la porte au bout de k tentatives (où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$).

Donner la loi de X .

2. 2ème cas : M. Kiboitro n'a pas bu de la journée. Pour ouvrir la porte, il essaie les clés au hasard une à une en mettant à l'écart les clés qu'il a déjà essayées. Quelle est la loi de X pour cette nouvelle expérience aléatoire ?

Exercice 34.8. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations (qui peuvent être annulées) sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n , il y a 4 chances sur 10 pour que quelqu'un la réserve au jour $n + 1$. En revanche, si elle est réservée au jour n , il y a 9 chances sur 10 pour qu'elle soit réservée au jour $n + 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons p_n la probabilité que la place donnée soit réservée au jour n .

1. Donner la valeur de p_0 .
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
3. En déduire l'expression de p_n .
4. Quelle est la limite de $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$?

Exercice 34.9. Les poules pondent des œufs que l'on classe suivant trois calibres : A (petit), B (moyen) et C (gros). On suppose que si une poule pond un œuf d'un certain calibre, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera du même calibre, avec une probabilité $\frac{1}{2}$, et d'un des deux autres calibres avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par a_n , b_n et c_n les probabilités respectives pour que le n -ième œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

Pour tout entier naturel n non nul, posons

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
2. À l'aide de la question précédente, trouver une matrice U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Montrer que U est une combinaison linéaire des matrices J (matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1) et I_3 . Calculer J^k pour tout $k \in \mathbf{N}$ (on pourra distinguer le cas $k = 0$) et en déduire l'expression de U^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des questions précédentes l'expression des termes généraux des suites a , b et c , ainsi que les limites de ces suites.

Exercice 34.10. On considère deux urnes : une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1, et une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.

On appelle "échange" l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne. On effectue des échanges successifs indéfiniment. Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par Z_n la variable aléatoire réelle discrète égale à la somme des points marqués sur les jetons de l'urne bleue après le n -ième échange. On note Z_0 la variable certaine égale à 1, somme initiale des points dans l'urne bleue.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de Z_1 et déterminer la loi de Z_1 .
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{Z_n=0}(Z_{n+1} = 0) \qquad \mathbb{P}_{Z_n=1}(Z_{n+1} = 0) \qquad \mathbb{P}_{Z_n=2}(Z_{n+1} = 0)$$

On note dans la suite pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $p_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(Z_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 2)$.

3. Exprimer p_{n+1} en fonction de q_n , puis q_{n+1} en fonction de p_n , q_n et r_n , et enfin, r_{n+1} en fonction de q_n .

On note pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$U_{n+1} = AU_n$. Cette relation est-elle encore valable pour $n = 0$?

4. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, $U_n = A^n U_0$.

On donne pour $n \in \mathbf{N}^*$, $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 - (-1/2)^n \\ 4 + 2(-1/2)^n \\ 1 - 1(-1/2)^n \end{pmatrix}$.

5. En déduire pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, p_n , q_n , r_n en fonction de n , ainsi que leur limite.

Indépendance

Exercice 34.11. On tire deux pièces de monnaie équilibrées et on considère A l'événement « la première pièce tombe sur Face », B l'événement « la deuxième pièce tombe sur Face » et C l'événement « les deux pièces tombent du même côté ». Les événements A , B , C sont-ils indépendants deux à deux ? Et mutuellement indépendants ?

Exercice 34.12. Soit $n \geq 2$ un entier. On s'intéresse à une famille dans laquelle il y a exactement n enfants, filles ou garçons. On note :

- A l'événement « la famille a des enfants des deux sexes » ;
- B l'événement « la famille a au plus une fille ».

Montrer que A et B sont des événements indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 34.13. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , on tire deux boules une à une, sans remise. On note X_1 le premier numéro tiré, X_2 le deuxième numéro tiré. Soit $X = \min(X_1; X_2)$ et $Y = \max(X_1; X_2)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer la loi de X et celle de Y .
3. Étudier l'indépendance des variables X et Y .

Exercice 34.14. Soit X et Y deux variables indépendantes définies par :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $Z = XY$.

Montrer que les variables aléatoires X , Y , Z sont indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

Exercice 34.15. On dispose de deux dés A et B dont les faces sont soit rouges, soit blanches. Le dé A a quatre faces rouges, le dé B quatre faces blanches. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le résultat est 1 ou 6, on ne joue ensuite qu'avec le dé A , sinon on ne joue qu'avec le dé B . On lance ensuite le dé sélectionné un certain nombre de fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « rouge » au premier jeu ? (le lancer de dé pour savoir avec quel dé jouer ne compte pas comme un jeu).
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers jeux. Quelle est la probabilité d'avoir rouge au troisième jeu ?
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers jeux. Calculer la probabilité d'avoir utilisé le dé A .

Exercice 34.16. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$ dans le cas où A et B sont disjoints, puis lorsque A et B sont indépendants, et enfin lorsque A est inclus dans B .

Exercice 34.17. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X = Y\}$.

Exercice 34.18. On considère deux variables aléatoires finies X_1 et X_2 de même loi. Soit Y une variable aléatoire de Bernoulli indépendante de X_1 et de X_2 .

Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z définie par $Z = X_1Y + X_2(1 - Y)$.

Exercice 34.19. Soit X , Y et Z trois variables aléatoires (mutuellement) indépendantes et de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, n étant un entier naturel pair strictement positif.

Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X = Y), \quad P(X \geq 2Y), \quad \text{et} \quad P(X + Y \leq Z)$$

Exercice 34.20. On tire 5 fois de suite 1 carte d'un jeu de 32 cartes, avec remise. Quelle est la probabilité de tirer au moins 2 as ?

Exercice 34.21. Lorsque les éléphants sautent en parachute au dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis sur les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact au sol est notée p avec $p \in]0; 1[$ et les raquettes sont indépendantes.

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. On note X la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de X .
2. Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de Y .
3. On suppose qu'un éléphant s'enlise s'il perd strictement plus de la moitié de son équipement. Comparer, en fonction de p , les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

Exercice 34.22 (CCINP 2023). Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$). Ces appels sont indépendants les uns des autres et, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé vaut $p \in]0; 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Après ses n appels, le secrétaire appelle une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacune des personnes qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus au total.
 - (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = \ell)$.
 - (b) Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$. Montrer que

$$\binom{n-k}{r-k} \binom{n}{k} = \binom{r}{k} \binom{n}{r}.$$

- (c) Déterminer la loi de Z .

Exercice 34.23. On lance n fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de « Pile » obtenus et Y le numéro du premier lancer qui a donné « Pile » (avec la convention que Y vaut 0 si on ne fait que des « Face »). Les lancers sont indépendants. Donner la loi conjointe de X et Y .