

TD 33

PROBABILITÉS ET
VARIABLES ALÉATOIRES

Généralités sur les probabilités

Exercice 33.1. Soit A, B, C trois événements. Exprimer à l'aide d'opérations (union, intersection, complémentaire) sur A, B et C les événements suivants.

1. D : « aucun des événements A, B, C n'est réalisé » ;
2. E : « au moins un des événements A, B, C est réalisé » ;
3. F : « exactement un des événements A, B, C est réalisé » ;
4. G : « au plus un des événements A, B, C est réalisé ».

Exercice 33.2. On lance cent fois de suite une pièce. Pour tout $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$, on note A_k l'événement « on obtient Pile au k -ième lancer ». Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A_k :

1. B : « le premier Pile est obtenu au deuxième lancer » ;
2. C : « le premier Face est obtenu au quatrième lancer » ;
3. D_n : « le premier Face est obtenu au n -ième lancer » (où $n \in \llbracket 2, 10 \rrbracket$) ;
4. E : « le second Pile est obtenu au quatrième lancer » ;
5. F : « au plus un Face est tiré » ;
6. G : « on n'observe jamais de séquence (Pile,Face) ».

Exercice 33.3. On considère un dé truqué à six faces. Les probabilités d'apparition des faces paires sont égales, de même pour les faces impaires. La probabilité d'obtenir une face paire est deux fois celle d'obtenir une face impaire. Quelle est la probabilité d'obtenir une face inférieure à 3 ?

Exercice 33.4. On parie au hasard sur une course de dix chevaux. Quelles sont les probabilités de gagner :

1. au tiercé dans le désordre (c'est-à-dire qu'on a trouvé les trois premiers mais pas nécessairement dans le bon ordre) ?
2. au tiercé dans l'ordre (c'est-à-dire qu'on a trouvé le premier, le deuxième et le troisième) ?

Exercice 33.5. Le code d'une carte bancaire est une suite ordonnée de quatre chiffres pris au hasard dans l'ensemble $\llbracket 0, 9 \rrbracket$. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « le code est formé de chiffres distincts » ;
2. B : « le code est formé d'une suite strictement croissante » ;
3. C : « le code comporte trois fois exactement le même chiffre » ;
4. D : « le code ne comporte que des chiffre impairs ».

Exercice 33.6. Un sac de bonbons contient 10 bonbons rouges, 15 bonbons oranges et 20 bonbons jaunes. Un enfant plonge la main dans le sac et en ressort quatre bonbons. Déterminer les probabilités des événements suivants.

1. A : « on obtient quatre bonbons de la même couleur » ;
2. B : « on obtient un bonbon au moins de chaque couleur » ;
3. C : « on obtient le même nombre de bonbons rouges et de bonbons jaunes ? ».

Exercice 33.7. On range aléatoirement cinq boules numérotées de 1 à 5 dans quatre boîtes numérotées de 1 à 4.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boîte ?
3. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
4. Même question avec une boîte vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

Exercice 33.8. On lance trois dés cubiques non pipés. On considère les événements suivants.

- A : « trois chiffres tous distincts » ;
- B : « exactement deux chiffres distincts ».

1. Proposer un univers pour lequel on est dans une situation d'équiprobabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 33.9. On tire quatre cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « on obtient un carré » ;
2. B : « on obtient au moins un as » ;
3. C : « on obtient une suite croissante de quatre cartes consécutives, non nécessairement de la même couleur » ;
4. D : « on obtient deux cartes rouges et deux cartes noires » ;
5. E : « on obtient exactement une dame et deux piques ».

Exercice 33.10. Soit A et B deux événements de probabilités respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}$. On suppose que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

1. Calculer la probabilité qu'au moins un des deux événements se réalise.
2. Calculer la probabilité qu'exactly un des deux se réalise.

Exercice 33.11. On lance deux dés équilibrés et on note les deux faces visibles obtenues. On note E l'événement « la somme des faces visibles est impaire », F l'événement « au moins l'une des faces est 1 » et G l'événement « la somme des faces est 5 ».

1. Donner toutes les issues de $E \cap F$, $F \cap G$ et $\overline{E \cup F}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(E \cap F)$, $\mathbb{P}(F \cap G)$, $\mathbb{P}(E \cup F)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(F \cup G)$, $\mathbb{P}(\overline{E \cup F})$, $\mathbb{P}(\overline{F} \cap \overline{G})$.

Exercice 33.12. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge, toutes trois indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « la première et la dernière boule sont de la même couleur » ;
2. B : « le tirage est bicolore » ;
3. C : « on a obtenue au moins une boule de chaque couleur ».

Exercice 33.13. Dans une tombola, 1000 billets dont 2 gagnants sont mis en vente. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Vous pourrez utiliser sans démonstration que les racines de $X^2 - 1999X + 500 \times 999$ sont approximativement égales à 292,7 et 1706,3.

Exercice 33.14. Soit $(n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire les boules au hasard, successivement, et avec remise. Le but de l'exercice est de calculer la probabilité que, sur r tirages, le plus grand des numéros obtenus soit k . Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on considère les événements :

- $A_{k,i}$: « le numéro obtenu au i -ième tirage est inférieur ou égal à k » ;
- B_k : « sur r tirages, le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à k » ;
- C_k : « sur r tirages, le plus grand numéro est égal à k ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{k,1})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(B_k)$.
3. En remarquant que $C_k = B_k \cap \overline{B_{k-1}}$, en déduire $\mathbb{P}(C_k)$.

Variables aléatoires

Exercice 33.15. Un joueur lance un dé à six faces.

- Il perd un euro s'il fait 4.
- Il gagne un euro s'il fait 1, 3 ou 6.
- Il ne gagne ni ne perd d'argent sinon.

On note X le gain algébrique du joueur.

1. Expliciter les événements suivants (c'est-à-dire donner toutes les issues qui les réalisent) :

$$\{X = 0\}, \quad \{X = 2\}, \quad \{X \leq 0\}.$$

2. Déterminer le support et la loi de la variable aléatoire X .
3. On pose $Y = 2X + 3$. Déterminer la loi de Y .
4. On pose $Z = X^2$. Déterminer la loi de Z .

Exercice 33.16. Cinquante pièces arrivent dans une usine, dont quatre sont défectueuses. Le contrôle qualité de l'usine teste au hasard dix pièces et renvoie le lot s'il trouve une pièce défectueuse.

1. On note N le nombre de pièces défectueuses parmi les dix testées lors du contrôle qualité. Donner la loi de N .
2. On note X la variable aléatoire égale à 1 si la livraison passe le contrôle qualité et égale à 0 sinon. Déterminer la loi de X .

Exercice 33.17. Soit $X \sim \mathcal{U}([-2, 2])$.

1. Donner la loi de $Y = 1 - X$.
2. Donner la loi de $Z = X^2$.

Exercice 33.18. On considère un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X .
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y .

Exercice 33.19. On considère un dé à 12 faces truqué : quand on le lance, on a deux fois plus de chance de tomber sur une face portant un nombre pair que sur une face portant un nombre impair, les faces de même parité étant équiprobables. On lance une fois ce dé, et l'on considère le résultat obtenu.

On note $\Omega = \llbracket 1, 12 \rrbracket$ l'univers associé à cette expérience et $\mathbb{P}$ la probabilité sur Ω associée à l'expérience.

On note X la distance absolue à 6 du résultat du lancer. Par exemple, si l'on obtient 2 au lancer du dé, X prend la valeur 4. On pose $Y = X^2 - 3X$.

1. En se basant sur la description du dé, expliciter la distribution de probabilité associée à $\mathbb{P}$, autrement dit, déterminer $\mathbb{P}(\{k\})$ pour tout $k \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$.
2. Déterminer la loi de X puis la loi de Y .

Exercice 33.20. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on lance n fois une pièce équilibrée, et on note X le nombre de Piles obtenus.

1. Déterminer la loi de X .
2. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de Piles que de Faces ?

Exercice 33.21. Un joueur prélève n boules successivement et avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On considère la variable aléatoire X égale au plus grand des numéros des boules tirées.

1. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$.
2. En déduire la loi de X .

Couples de variables aléatoires

Exercice 33.22. On considère une urne contenant 6 boules. Il y a une boule numérotée « 1 », deux boules numérotées « 2 » et trois boules numérotées « 3 ».

On tire simultanément au hasard deux boules (sans remise donc) dans l'urne. On note X le plus petit des deux nombres et Y le plus grand.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y .
2. En déduire les loi marginales de X et Y .
3. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 33.23. On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On note D_1 et D_2 les résultats de chacun de ces dés.

1. Donner la loi conjointe de (D_1, D_2) .
2. On note $S = D_1 + D_2$. Déterminer la loi de S .
3. On note $M = \max(D_1, D_2)$. Déterminer la loi de M .

Exercice 33.24. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket^2$.

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. (a) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
(b) En déduire $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
4. Déterminer la loi de $D = |X - Y|$.