TD 32 Déterminants

Déterminant d'une matrice

Exercice 32.1. Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} j & j \\ -1 & j \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **4.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; **6.** $\begin{vmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix}$; **7.** $\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}$; **8.** $\begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **10.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; **11.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; **12.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

Exercice 32.2. Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 32.3. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_3)$ n'est pas réduit à l'élément nul.
3. Pour chacune de ces valeurs, trouver une base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_3)$.
4. Vérifier que la réunion de ces bases fournit une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
5. Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Prouver sans calcul de produit matriciel que $P^{-1}AP$ est diagonale.
6. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'expression de A^k en fonction de k.

Exercice 32.4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On rappelle que la **trace** de A, notée $\operatorname{tr}(A)$, est la somme des éléments diagonaux de A.

1. Montrer que $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Supposons que $\det(A) \neq 0$. Déterminer une formule permettant de calculer A^{-1} qui utilise $\det(A)$, $\operatorname{tr}(A)$ et A.
3. Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, A^n.

Exercice 32.5. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$ la matrice $M_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 32.6. Soit a, b, c trois nombres complexes. Exprimer les déterminants suivants sous la forme la plus factorisée possible.

1. $\begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2a) & \cos(2b) & \cos(2c) \end{vmatrix}$; **5.** $\begin{vmatrix} 2a & 2b & c-a-b \\ 2a & b-c-a & 2c \\ a-b-c & 2b & 2c \end{vmatrix}$; **6.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{vmatrix}$ $(a \neq 0)$.

Exercice 32.7. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, note D_n le déterminant de la matrice d'ordre n de coefficients notés $d_{i,j}$ avec $d_{i,i} = 3$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_{i+1,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $d_{i,i+1} = 2$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $d_{i,j} = 0$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $j \notin \{i-1; i; i+1\}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$.
2. En déduire l'expression de D_n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

Exercice 32.8. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note d_n le déterminant de la matrice A_n d'ordre n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos(\theta) & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer d_1 et d_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $d_{n+2} = 2\cos(\theta) d_{n+1} - d_n$.
3. En déduire l'expression du terme général de la suite (d_n).

Déterminant d'une famille de vecteurs

Exercice 32.9.

1. La famille $((1, 3, 2), (1, 2, -1), (0, 1, 3))$ est-elle une base de $\mathbf{R}^3$?
2. La famille $((1, -i, -1), (i, 1, -i), (-1, i, 1))$ est-elle une base de $\mathbf{C}^3$?
3. La famille $(1 + X - X^2, 3 - X + 5X^2, -1 + 2X + 3X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$?

Exercice 32.10.

1. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles la famille $((m+1, m-1), (4, m-1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles la famille $((m, m+1, 1), (4, m-1, 0), (1, 2, m))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 32.11. On se place dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Soit $P_1 = X^3$, $P_2 = (X+1)^3$, $P_3 = (X-1)^3$ et $P_4 = (X-2)^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Calculer $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Exercice 32.12 (*Déterminant de Vandermonde*). Pour tout $n \geqslant 2$ entier et tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, notons

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}$, $V(a_1, \dots, a_{n+1}) = P(a_{n+1}) V(a_1, \dots, a_n)$, où $P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.
2. En déduire que pour tous $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$, $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.
3. Soit $z_0, \dots, z_n$ des complexes distincts. Montrer que la famille $((X - z_0)^n, \dots, (X - z_n)^n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 32.13. Calculer le déterminant de l'application linéaire suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1) \end{array}$$

Qu'en déduit-on sur f ?

Exercice 32.14. Soit λ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ défini par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)^2 P'' + (\lambda X + 1) P' + P \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit un automorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.