TD 31 Utilisation des matrices en algèbre linéaire

Famille de vecteurs

Exercice 31.1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de cet espace vectoriel.

1. La famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est-elle une base de E ?
2. Même question avec la famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

Représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 31.2. Déterminer les matrices relativement aux bases canoniques des applications linéaires ci-dessous, puis déterminer le rang de ces applications linéaires et en déduire si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$

2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x-y+3z, -y+z) \end{array}$

3. $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z) \end{array}$

4. $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-5y+4z \end{array}$

5. $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$

6. $\varphi_6 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$

7. $\varphi_7 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y & z \\ z-y & x+y-z \end{pmatrix} \end{array}$

8. $\varphi_8 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & 2M + M^\top \end{array}$

Exercice 31.3. Posons $E = \text{Vect}\,(x \mapsto 1, \sin, \cos)$, sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie. En donner une base $\mathcal{B}$ et la dimension.
2. On définit sur E l'application u par $u(f) = f + f' + f''$. Montrer que u est un endomorphisme de E, et déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. u est-il un automorphisme de E ? Dans ce cas, expliciter u^{-1}.

Exercice 31.4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère l'application f_1 canoniquement associée à A. Calculer $f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.
2. On considère l'endomorphisme f_2 de $\mathbf{R}_2[X]$ dont B est la matrice relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Calculer $f_2(X^2 + 3X - 4)$.
3. On considère l'application f_3 de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice B relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ et à la base $b' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ où $(e_1, e_2, e_3) = ((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1))$. Calculer $f_3(3X^2 + 1)$.

Exercice 31.5. On considère les deux applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (2y, -x+3y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (2x-2y, x-y) \end{array}$$

1. Donner les matrices A et B de f et g relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^2$.
2. Calculer AB et BA. Que peut-on en déduire sur f et g ?

3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. En déduire que f est inversible et expliciter f^{-1}.
4. Donner sans démonstration la valeur de B^n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$. Que peut-on en déduire sur g ?

Exercice 31.6. 1. On considère l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-5x+3y, -14x+8y). \end{array}$

Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ de $\mathbf{R}^2$ pour laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si une telle base $\mathcal{B}$ existe, que valent $f(u_1)$ et $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2 ?

(b) Résoudre l'équation $f((x,y)) = (x,y)$. En déduire un candidat pour le vecteur u_1.

(c) En résolvant une autre équation déterminer un candidat pour le vecteur u_2.

(d) Conclure.

2. En procédant de même, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de l'endomorphisme

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x+y-3z\,,\, x+5y-3z\,,\, 2x+2y-2z) \end{array}$$

est $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 31.7. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle **trace** de A le nombre : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Nous avons montré que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (voir TD sur les matrices).

1. Montrer que si M et N sont deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, alors $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N)$.
2. On définit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & (-29-31X)P(0) + (12+13X)P(1) \end{array}$. C'est un endomorphisme de $\mathbf{R}_1[X]$ (on ne demande pas de le montrer). Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}_1[X]$.
3. On cherche désormais une base de $\mathbf{R}_1[X]$ telle que la matrice représentative de f dans cette base soit $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans cette base.

(a) Déterminer l'ensemble des polynômes invariants par f. En déduire une valeur possible de λ.

(b) Que peut alors valoir μ ?

(c) Déterminer la base recherchée et conclure.

Exercice 31.8. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Donner la matrice M de f dans cette base.
3. Que vaut M^n ?

Un tel endomorphisme est dit **nilpotent** *d'indice n (l'indice est le plus petit entier k tel que $f^k = 0$).*

Exercice 31.9. Soit λ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ défini par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)^2P'' + (\lambda X + 1)P' + P \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit un automorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 31.10. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $f^2 = 0$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 31.11. On considère l'application linéaire u de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est de rang 3.

2. Construire une base e de $\mathbf{R}^4$ et une base f de $\mathbf{R}^3$ telles que la matrice représentant u dans les bases e et f soit donnée par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31.12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ défini par $\phi(M) = AM - MA$.

1. Expliciter la matrice de ϕ relativement à la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Déterminer le noyau et l'image de ϕ, leur dimension, et une base de chacun d'eux.

3. Justifier que $\operatorname{Ker} \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

4. Déterminer la matrice de ϕ dans une base adaptée à $\operatorname{Ker} \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

Changement de bases

Exercice 31.13. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les familles suivantes :

$$\mathcal{B} = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)).$$

Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbf{R}^3$, et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Exercice 31.14. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On introduit les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (2,1,2), \qquad v_2 = (0,1,3), \quad \text{et} \quad v_3(2,0,3).$$

Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et, à l'aide des formules de changement de base, déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 31.15. On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ est la matrice

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 3 \\ -4 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

On considère la famille $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (2,1,1)$, $e_2 = (1,2,0)$ et $e_3 = (1,1,2)$

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

2. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.

3. Sans utiliser de matrice de passage, donner la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}_1$.

4. Donner une relation entre D, A et P.

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer A^n.

Exercice 31.16. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dont la matrice relativement à une base $\mathcal{B}$ de E est une matrice scalaire $A = \lambda I_n$.
Montrer que A est la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

Exercice 31.17. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3, 3e_2 - e_3, 2e_1 - e_2)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f vérifiant
$$f(e_1 + e_3) = 2e_2 \qquad f(3e_2 - e_3) = 7e_1 - e_2 + 6e_3 \qquad f(2e_1 - e_2) = 4e_1 + 2e_2 + 6e_3.$$
3. En déduire à l'aide des formules de changement de base la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Endomorphismes remarquables

Exercice 31.18. On note f l'application définie sur $\mathbf{R}_3[X]$, à valeurs dans $\mathbf{R}_3[X]$, qui à un polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par $X^2 - X + 1$.

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$, et vérifier, avec celle-ci, que f est un projecteur.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 31.19. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 31.20. Soit $F = \left\{ x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x = z \right\}$ et G la droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ engendrée par le vecteur $u = (1, 0, -1)$.

1. Déterminer une base (v, w) de F, et vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Donner la matrice de p relativement à la base (u, v, w).
3. En déduire la matrice de p relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 31.21. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que la concaténée b de la base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de la base de $\mathrm{Im}(f)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. En déduire que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
3. Donner la matrice de f dans la base b (sans utiliser de matrices de passage).
4. Décrire f comme la composée de deux endomorphismes très simples.

Exercice 31.22. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que f est un projecteur si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ où le nombre de 1 est dans $[\![0, n]\!]$.
2. Montrer que f est une symétrie si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ où le nombre de 1 est dans $[\![0, n]\!]$.

Noyau, image, rang d'une matrice

Exercice 31.23. Déterminer une base du noyau et de l'image des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 31.24. Soit $m \in \mathbf{R}$. Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;
2. $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$