

TD 30

ENSEMBLES FINIS ET
DÉNOMBREMENT

Dénombrement

Exercice 30.1. Dénombrer les nombres de 4 chiffres écrits uniquement avec les chiffres 1, 2 et 3.

Exercice 30.2. Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9. On tire quatre boules de l'urne. Dénombrer le nombre de tirages possibles dans les trois cas suivants :

1. les tirages sont successifs et sans remise ;
2. les tirages sont successifs et avec remise ;
3. les tirages sont simultanés.

Exercice 30.3. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former en utilisant uniquement les lettres du mot PARIS, sans répétition ? Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot PARIS existe-t-il ? Reprendre cette dernière question avec le mot BILLE, puis avec le mot ESCARPOLETTE.

Exercice 30.4. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de quatre familles : pique, cœur, carreau et trèfle, chacune constituée de huit cartes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7. On tire successivement et sans remise huit cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages contiennent au moins un as ?
3. Combien de tirages comprennent au moins un pique ou une dame ?
4. Combien de tirages contiennent exactement 2 rois ?

Exercice 30.5. Dans un jeu de 32 cartes, on choisit (simultanément) cinq cartes au hasard.

1. Quel est le nombre total de mains que l'on peut obtenir ? (une main désigne les cartes détenues par le joueur)
2. Combien de ces mains contiennent l'as de pique ?
3. Combien de ces mains contiennent exactement 4 as ?
4. Combien de ces mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ?
5. Combien de ces mains contiennent au moins un as ?
6. Combien de ces mains contiennent au moins 3 rois ?
7. Combien de ces mains contiennent exactement 2 as et 2 carreaux ?
8. Combien de ces mains sont bicolores (c'est-à-dire qu'il y a au moins une carte rouge et au moins une carte noire) ?
9. Combien de ces mains contiennent 2 piques et 3 carreaux ?

Exercice 30.6. Huit chevaux, numérotés de 1 à 8, s'affrontent dans une course hippique.

Un pari consiste à donner l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux, par exemple (3, 5, 2). On gagne le tiercé lorsque l'on donne les bons chevaux du trio de tête dans le bon ordre d'arrivée et on gagne le tiercé dans le désordre lorsque l'on donne le bon trio de tête mais pas dans l'ordre d'arrivée. Dans les autres cas, on ne gagne rien.

1. Combien y a-t-il de paris possibles ?
2. On vient de faire notre pari. Combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles pour les 8 chevaux, où l'on gagne quelque chose ?
3. Quel est le nombre minimum de paris qu'il faut faire pour être sûr de gagner quelque chose ?

Exercice 30.7. Douze livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Parmi ceux-ci, trois constituent les trois tomes d'un roman.

1. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, dans l'ordre (de gauche à droite : tome 1, 2 puis 3) ?

2. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, mais pas forcément dans l'ordre ?

Exercice 30.8. Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et sept boules noires numérotées de 1 à 7. On effectue quatre tirages successifs et avec remise. Dénombrer

1. les différents tirages possibles ;
2. les tirages amenant quatre boules rouges ;
3. les tirages amenant au moins une boule rouge ;
4. les tirages amenant trois boules rouges et une boule noire ;
5. les tirages bicolores.

Reprendre chacune de ces questions dans le cas de tirages successifs et sans remise, puis dans le cas de tirages simultanés.

Exercice 30.9. Soit $n, p \in \mathbf{N}^*$ tels que $2 \leq p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue un tirage de p boules. Les tirages sont successifs et avec remise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins deux fois le même numéro ?
4. Combien y a-t-il de tirages où exactement 2 numéros sont apparus ?

Exercice 30.10. Soit A un ensemble fini de cardinal n , et B une partie de A de cardinal p . Dénombrer les parties X de A vérifiant $B \subset X \subset A$.

Exercice 30.11. On répartit n boules indiscernables dans trois boîtes différentes. Combien y a-t-il de répartitions telles que deux boîtes exactement contiennent des boules ?

Exercice 30.12.

1. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?
2. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?
3. Combien y a-t-il de listes formant une suite de 5 chiffres strictement croissantes ?
4. Une liste palindrome est une liste qui se lit de la même façon à l'endroit ou à l'envers, comme 12321 ou 052250. Combien y a-t-il de listes palindromes à 15 chiffres ?

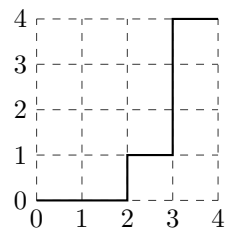
Exercice 30.13. On dispose dix jetons portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec ?
2. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire où B, A et C apparaissent dans ce ordre et côte à côte ?

Exercice 30.14. Dénombrer les couples (A, B) de parties d'un ensemble E à n éléments tels que $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 30.15. On se place dans le plan muni du quadrillage $\mathbf{N}^2$. On ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(2, 2)$?
2. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(4, 4)$?
3. Parmi ces chemins, combien y en a-t-il passant par le point $(1, 2)$?



Exercice 30.16. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y = n$ dans $\mathbf{N}^2$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y + z = n$ dans $\mathbf{N}^3$.
3. On décide de représenter les solutions de $x + y + z = n$ dans $\mathbf{N}^3$ de la manière suivante : une solution (x, y, z) est codée par le mot binaire comportant des séquences de x , y et z chiffres 1 séparées par le chiffre 0 : par exemple, pour $n = 6$, la solution $(2, 1, 3)$ sera codée par le mot binaire 11010111. Retrouver le résultat de la question 2 en utilisant cette représentation des solutions.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$ dans $\mathbf{N}^p$.
5. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$ dans $(\mathbf{N}^*)^p$.
6. Combien y a-t-il de façons de ranger n objets indiscernables dans n tiroirs différents?

Exercice 30.17. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) En descendant les marches d'un escalier par une ou deux à la fois, de combien de façons peut-on descendre un escalier à 12 marches? On exprimera la réponse à l'aide d'une somme.
 (b) Même question pour un escalier à 13 marches.
 (c) Généraliser au cas d'un escalier à n marches.
2. On propose dans cette question une autre approche pour déterminer le nombre de façon de descendre un escalier à n marches (toujours en autorisant des pas de une ou de deux marches). On notera M_n ce nombre.
 (a) Calculer M_1 , M_2 et M_3 .
 (b) Montrer en considérant le dernier pas, que

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}.$$

- (c) En déduire la valeur de M_n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 30.18 (Principe des tiroirs de Dirichlet). Quand on doit ranger $n + 1$ chaussettes dans n tiroirs, deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.

1. Démontrer que si on connaît trois entiers, alors deux au moins sont de même parité.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère un ensemble de $n + 1$ entiers choisis parmi $1, 2, 3, \dots, 2n$. Montrer qu'il existe deux entiers de cet ensemble dont la somme vaut $2n + 1$ (exemple avec $n = 5$: choisissez 6 entiers distincts entre 1 et 10; il y en a deux dont la somme vaut 11).
3. Montrer que, parmi les Lorrains chevelus, il en existe au moins deux avec exactement le même nombre de cheveux. On considérera qu'un individu possède au plus 300 000 cheveux, et qu'il y a environ 2 300 000 habitants chevelus en Lorraine.
4. Étant donné cinq points dans un carré d'arête 2, montrer qu'on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.

Applications entre ensembles finis

Exercice 30.19. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans E .
2. Déterminer le nombre d'applications de E dans E qui ne sont pas surjectives.
3. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$.
4. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1, 2\}$.

Exercice 30.20. Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 30.21. 1. Soit E et F deux ensembles finis et $u \in \mathcal{F}(E, F)$ et $v \in \mathcal{F}(F, E)$. Montrer que si u et v sont injectives alors u et v sont bijectives.

2. Plus généralement, soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis. Soit $u_1, \dots, u_n$ des applications injectives telles que pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $u_i \in \mathcal{F}(E_i, E_{i+1})$ et $u_n \in \mathcal{F}(E_n, E_1)$. Montrer que les applications $u_1, \dots, u_n$ sont bijectives.

Exercice 30.22. Pour tous entiers strictement positifs n et p , on note E_n^p l'ensemble des p -uplets croissants formés avec des éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On cherche à calculer le cardinal k_n^p de E_n^p .

1. Une première méthode. On fixe deux entiers strictement positifs n et p et on note S_n^p l'ensemble des p -uplets strictement croissants formés avec des éléments de $\llbracket 2, n + p \rrbracket$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \quad E_n^p &\longrightarrow S_n^p \\ (a_1, a_2, \dots, a_p) &\longmapsto (a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_p + p) \end{aligned}.$$

- (a) Vérifier que φ est correctement définie, autrement dit l'image par φ de tout élément de E_n^p appartient bien à S_n^p .
- (b) Montrer que φ est une bijection.

(c) Déterminer le cardinal de S_n^p et en déduire celui de E_n^p .

2. Une seconde méthode.

(a) Calculer k_n^1 et k_1^p pour tous entiers n et p strictement positifs.

(b) Montrer que pour tous entiers $n \geq 2$ et $p \geq 2$:

$$k_n^p = k_n^{p-1} + k_{n-1}^p.$$

(c) En déduire que pour tous entiers n et p strictement positifs,

$$k_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Démonstrations par des méthodes combinatoires

Exercice 30.23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dénombrer de deux façons les parties d'un ensemble à n éléments. En déduire l'égalité suivante : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 30.24. On considère trois entiers naturels n , p et q , l'entier n étant inférieur ou égal aux deux autres. Démontrer l'identité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k}$$

d'une part par un raisonnement combinatoire, d'autre part en utilisant le polynôme $(1+X)^p \cdot (1+X)^q$.

Exercice 30.25. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $2 \leq p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue un tirage de p boules. Les p boules sont extraites simultanément.

- Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq k \leq n$. Déterminez le nombre de tirages tels que le plus grand numéro tiré est k .
- Déduire des deux questions précédentes que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

Exercice 30.26. Soit n, p deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$. Le but de l'exercice est de montrer, de trois manières différentes, que

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

- Simplifier le produit des coefficients binomiaux et utiliser l'égalité $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = 2^p$.
- Montrer l'égalité demandée en remarquant que $((1+X)+X)^n = (1+2X)^n$.
- Montrer l'égalité demandée en dénombrant de deux façons différentes l'ensemble des couples (A, B) de parties d'un ensemble E de cardinal n , vérifiant $\text{Card}(B) = p$ et $A \subset B$.