

TD 29

APPLICATIONS LINÉAIRES

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 29.1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $a : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$;
 $(x, y, z) \mapsto (2x + y, 3x - z - 1)$
2. $b : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$;
 $(x, y) \mapsto (2x - 3y, x + 5y)$
3. $c : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$;
 $(x, y) \mapsto xy$
4. $d : \mathbf{C}[X] \rightarrow \mathbf{C}$;
 $P \mapsto P(0) + P'(1)$
5. $e : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$;
 $P \mapsto P^2$
6. $f : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}[X]$;
 $(a_0, a_1, a_2) \mapsto a_0 + a_1X + a_2X^2$
7. $g : \mathbf{C}^{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}^2$;
 $u \mapsto (\Re(u(0)), |u(1)|)$
8. $h : D^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$;
 $u \mapsto u + u'$
9. $i : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$;
 $u \mapsto (nu_n)_{n \in \mathbf{N}}$
10. $j : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$;
 $u \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$
11. $k : \mathbf{R}_3[X] \rightarrow \mathbf{R}^3$;
 $P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$
12. $\ell : \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ converge}\} \rightarrow \mathbf{R}$;
 $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 29.2. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

1. Développer $(u + v)^2$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(u + v)^2 = u^2 + 2u \circ v + v^2$.
3. Donner une condition suffisante pour que $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2 \circ v + 3u \circ v^2 + v^3$.
4. Donner une condition suffisante pour que l'on puisse développer $(u + v)^n$ à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 29.3. On dit qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est **nilpotent** si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $u^p = 0$.

1. Si $E \neq \{0\}$, un endomorphisme nilpotent peut-il être bijectif ?
2. Soit u et v deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel E . On suppose que u et v commutent. Montrer que $u + v$ est nilpotent.

Exercice 29.4. Soit E et F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels, $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\alpha \in \mathbf{K}^*$. Montrer que :

1. $\text{Im}(\alpha u) = \text{Im}(u)$;
2. $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$;
3. $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u + v)$.

Proposer des exemples montrant que ces inclusions sont strictes en général.

Exercice 29.5. Soit E, F, G trois $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que :

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g).$$

Exercice 29.6. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.
3. Montrer que $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.
4. En déduire que si E est un espace de dimension finie et $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$, alors $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 29.7 (Suites des noyaux et des images itérés). Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

1. Montrer que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et que plus généralement, pour tout entier naturel p , $\text{Ker}(u^p) \subset \text{Ker}(u^{p+1})$. Que dire des inclusions réciproques ?
2. Trouver de même une relation d'inclusion entre $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(u^2)$ puis plus généralement entre $\text{Im}(u^p)$ et $\text{Im}(u^{p+1})$, pour tout entier naturel p .

Exercice 29.8. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$.

Exercice 29.9. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E .

Montrer que si u et v commutent, alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Exercice 29.10 (Lemme de Schur). Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $h \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $y \in E$, il existe $\lambda_y \in \mathbf{K}$ tel que $h(y) = \lambda_y y$. Le but de l'exercice est de montrer que h est une **homothétie** de E (c'est-à-dire qu'il existe une constante α tel que pour tout $y \in E$, $h(y) = \alpha y$). Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

1. Soit $y \in \text{Vect}(x)$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
2. Soit $y \in E \setminus \text{Vect}(x)$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
3. Conclure.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 29.11. Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

1. $u: \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$;
 $M \longmapsto M^\top$
2. $u: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$;
 $M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M - \text{tr}(M) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $u: \mathbf{R}_2[X] \longrightarrow \mathbf{R}^3$;
 $P \longmapsto (P(-1), P(0), P(1))$
4. $u: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$;
 $(x, y, z) \longmapsto (3x + y - z, 2x - y, 2x - z)$

Exercice 29.12. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer une base du noyau, de l'image et pour les trois premières questions un système d'équations de l'image. On a noté $E = \{u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$. On rappelle que si M est une matrice carrée, on appelle **trace** de M (qu'on note $\text{tr}(M)$) la somme des éléments diagonaux de M .

Vous préciserez si les applications sont injectives, surjectives.

1. $u: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$;
 $(x, y) \longmapsto (x - y, y - x, 0)$
2. $u: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$;
 $z \longmapsto z + i\bar{z}$
3. $u: \mathbf{C}_3[X] \longrightarrow \mathbf{C}_3[X]$;
 $P \longmapsto P - (X + 1)P'$
4. $u: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$;
 $(a, b) \longmapsto (a2^n + b(-3)^n)_{n \in \mathbf{N}}$
5. $\varphi: E \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$;
 $u \longmapsto \begin{pmatrix} u_0 & u_2 \\ u_3 & u_1 \end{pmatrix}$
6. $u: \mathcal{C}^0(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$;
 $f \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f(t)e^t dt \end{bmatrix}$
7. $u: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_3[X]$;
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto a(X^3 + X^2 - 1) + b(X^3 + X + 2) + c(X^2 - X - 3) + d(X^3 - 2)$

Exercice 29.13. Déterminer les dimensions du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $u: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$;
 $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y, x + 2y)$
2. $u: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$;
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y - z, 2x - y + z)$
3. $u: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$;
 $(x, y, z) \longmapsto (2x + y + z, y + z, x)$
4. $u: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$;
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y + z)$
5. $u: \mathbf{K}_3[X] \longrightarrow \mathbf{K}_4[X]$;
 $P \longmapsto X(P' - P'(0))$

Exercice 29.14. Montrer que $u : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ et déterminer son noyau. Montrer que son image est $\text{Vect}(X, X^2)$.

$$P \mapsto P(0)X^2 + P(1)X$$

Exercice 29.15. Soit $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$. Montrer que φ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

$$f \mapsto f' + \cos \times f$$

Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 29.16. 1. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbf{K}^2$ tel que $x_0 \neq x_1$. Montrer que

$$\mathcal{B} = ((X - x_0), (X - x_1))$$

est une base de $\mathbf{K}_1[X]$. Soit $P \in \mathbf{K}_1[X]$. Déterminer, en fonction de $P(x_0)$ et $P(x_1)$, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit un triplet $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{K}^3$ de scalaires deux à deux distincts. Montrer que

$$\mathcal{B} = ((X - x_1)(X - x_2), (X - x_0)(X - x_2), (X - x_0)(X - x_1))$$

est une base de $\mathbf{K}_2[X]$. Soit $P \in \mathbf{K}_2[X]$. Déterminer, en fonction de $P(x_0)$, $P(x_1)$ et $P(x_2)$, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$P_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

- (a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Vérifier que $P_k \in \mathbf{K}_n[X]$ et calculer $P_k(x_j)$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- (b) Montrer que $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
- (c) Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Déterminer, en fonction des nombres $P(x_k)$, les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.
- (d) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbf{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbf{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Déterminer son application réciproque.

Exercice 29.17. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ avec $a^2 + 4b \neq 0$. Soit $E = \{u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

- 1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
- 2. Montrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbf{C}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme.
- 3. En déduire la dimension de E .
- 4. Déterminer les suites géométriques non nulles qui sont éléments de E .
- 5. En déduire une base de E . Quel résultat vient-on de retrouver ?

Exercice 29.18. 1. Donner, si possible, un exemple d'endomorphisme de $E = \mathbf{K}^2$:

- (a) dont le noyau est réduit à $\{(0, 0)\}$;
- (b) dont le noyau et l'image sont non nuls et distincts ;
- (c) dont le noyau est égal à l'image ;
- (d) dont le noyau est égal à E .

2. Reprendre les mêmes questions dans $E = \mathbf{K}^3$.

Exercice 29.19. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et u, v deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ et en déduire que

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

2. On suppose que $v \circ u = 0$ et que $\text{Ker}(u + v) = \{0\}$. Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$.

Exercice 29.20. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f en endomorphisme de E .

1. Montrer que les suivantes sont équivalentes.

$$(i) \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2); \quad (ii) \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2).$$

2. Montrer ensuite que ces deux assertions sont équivalentes à l'assertion (iii) : $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 29.21. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = \operatorname{Id}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 + f + \operatorname{Id})$.

2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ et $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 29.22. Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme non bijectif de E tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que pour tout $y \in \operatorname{Im}(u)$, $u^2(y) = -y$.

2. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = E$.

3. Soit $a \in \operatorname{Im}(u)$ tel que $a \neq 0_E$. Montrer que la famille $(a, u(a))$ est libre. Déterminer le rang de u .

Exercice 29.23. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Démontrer que

$$(\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)) \iff (u^2 = 0 \text{ et } \dim(E) = 2\operatorname{rg}(u)).$$

Exercice 29.24. Soit E, F, G trois $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On note $v = g|_{\operatorname{Im}(f)}$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(g \circ f)$.

2. En déduire que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f))$.

3. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(F)$.

Exercice 29.25 (Indice maximal de nilpotence). Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension $n > 0$. Un endomorphisme f de E est dit **nilpotent** s'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0$. Soit u un endomorphisme nilpotent et soit $p_0 = \min \{p \in \mathbf{N} \mid u^p = 0\}$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p_0-1}(a) \neq 0_E$.

2. Montrer que la famille $(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{p_0-1}(a))$ est libre.

3. En déduire que $p_0 \leq n$.

Exercice 29.26. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous espace vectoriel de E et φ un endomorphisme de E . Montrer que si $F \subset \varphi(F)$ alors $F = \varphi(F)$.

Projecteurs, symétries

Exercice 29.27. On se place dans $\mathbf{R}^3$. On considère P le plan d'équation $x - y + z = 0$ et la droite $D = \operatorname{Vect}((1, 3, 1))$.

1. Justifier que P et D sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

2. On note p la projection sur P parallèlement à D et s la symétrie par rapport à P parallèlement à D .

Pour des réels x, y, z quelconques, donner des expressions de $p(x, y, z)$ et $s(x, y, z)$.

Exercice 29.28. On considère l'application suivante

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbf{R}_3[X] \\ P &\longmapsto \frac{1}{2}(P(X) - P(2 - X)) \end{aligned}$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

2. Trouver une base et la dimension du noyau puis de l'image de ψ . Quel est le rang de ψ ?

3. Déterminer ψ^2 .

4. Que peut-on dire de l'image et du noyau de ψ ?

Exercice 29.29. Soit $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z)$$

L'application f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$. Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 29.30. Montrer que les ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (1, -3, 3, 1))$ sont supplémentaires. Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G . Donner également l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 29.31. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f + f - 6\text{Id} = 0$.

1. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .
2. Montrer que $\text{Ker}(f + 3\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = E$.

Exercice 29.32. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel non réduit au vecteur nul et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 = f^2$.

1. Montrer que $f^p = f^2$ pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2.
2. Prouver que si l'application f est bijective, alors $f = \text{Id}$.
3. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f^2) = E$.

Exercice 29.33. On introduit

$$F = \text{Vect}((1, 1, 0)) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
2. Expliciter la projection p sur G de direction F et la symétrie s par rapport à F de direction G .

Exercice 29.34. On considère l'application

$$u : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{3}(x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z)$$

1. Montrer que u est une symétrie de $\mathbf{R}^3$.
2. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 29.35. On considère $\mathbf{C}$ comme un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et l'application

$$p : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$$

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbf{C}$.
2. Montrer que p est un projecteur. Déterminer $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.

Exercice 29.36. Pour chacune des applications φ suivantes, vérifier qu'il s'agit d'un projecteur et déterminer sa direction $\text{Ker}(\varphi)$, ainsi que ses invariants $\text{Ker}(\varphi - \text{Id})$.

$$\varphi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X] \quad \text{puis} \quad \varphi : \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$$

$$P \longmapsto P(1)X^2 \qquad f \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto (f(1) - f(0))x + f(0) \end{bmatrix}$$

Exercice 29.37. On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(\cos, \sin, \exp)$.

1. Montrer que pour tout $f \in F$, on a $f'' \in F$.
2. On définit l'application $\varphi : F \longrightarrow F$

$$f \longmapsto f''.$$
 - (a) Montrer que φ est un endomorphisme de F .
 - (b) Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
 - (c) Quelle est la nature de φ ? On précisera ses éléments caractéristiques.
 - (d) Donner l'expression des deux projections associées à φ .

Exercice 29.38. Soit E un $\mathbf{K}$ –espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E . Montrer que :

$$\begin{aligned} p \circ q = p &\iff \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p) \\ p \circ q = q &\iff \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p). \end{aligned}$$

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 29.39. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Justifier que les ensembles suivants sont des hyperplans dont on donnera une équation (dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et de $\mathbf{R}_n[X]$ respectivement).

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$;
2. $H = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \mid \tilde{P}(0) = 0\}$.

Exercice 29.40. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on appelle **trace** de M (qu'on note $\text{tr}(M)$) la somme des éléments diagonaux de M . Montrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n).$$

Équations linéaires

Exercice 29.41. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est un endomorphisme.

$$u \longmapsto (u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

Déterminer les ensembles

$$E = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 4\}, \quad F = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 12(-1)^n\}.$$

Exercice 29.42. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{R}_3[X]$ qui vérifient $\tilde{P}(-1) = \tilde{P}(1) = 1$.