

TD 28

DIMENSION D'UN ESPACE
VECTORIEL

Familles libres, génératrices, bases

Exercice 28.1. La famille de vecteurs $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 1))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^3$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 28.2. La famille de vecteurs $((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 0))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^4$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbf{R}^4$?

Exercice 28.3. Démontrer que la famille de polynômes $(X - 2, 2X + 3)$ est une base de $\mathbf{R}_1[X]$.

Exercice 28.4. On considère $a = (1, i, -1, -i)$, $b = (0, 1 + i, 2i, i - 1)$ et $c = (1, 1, 1, 1)$. Prouver que (a, b, c) est une famille liée dans le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ et une famille libre dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^4$.

Exercice 28.5. Introduisons les fonctions f , g et h définies sur $\mathbf{R}$:

$$f : x \mapsto e^x, \quad g : x \mapsto e^{2x}, \quad h : x \mapsto e^{3x}.$$

Démontrer que la famille (f, g, h) est une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 28.6. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, dire si les familles suivantes sont libres.

1. $\mathcal{F}_1 = (f_k : x \mapsto e^{x+k})_{1 \leq k \leq 100}$;
2. $\mathcal{F}_2 = (g_k : x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq 100}$.

Exercice 28.7. Soit $m \in \mathbf{N}$. On note, pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $f_i : x \mapsto \sin(2^i x)$. Pour les familles de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ci-dessous, dites si elles sont libres ou liées.

1. $\mathcal{F}_1 = (\cos, \sin, \exp)$;
2. $\mathcal{F}_2 = (\text{ch}, \text{sh}, \exp)$;
3. $\mathcal{F}_3 = (\cos, \sin, f : x \mapsto \cos(x + \pi/4))$;
4. $\mathcal{F}_{4,m} = (f_0, f_1, \dots, f_m)$.

Exercice 28.8. Déterminer une famille génératrice, puis une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x + y = 0 \text{ et } x + t = 0\}$;
2. $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$.

Exercice 28.9. On considère l'ensemble

$$F = \{P \in \mathbf{C}_4[X] \mid \tilde{P}(-1) = \tilde{P}(1) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}_4[X]$, en donner une base et sa dimension.

Exercice 28.10. Considérons les ensembles

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - 4z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}.$$

Montrer que E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie et en déterminer une base.

Exercice 28.11. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$x = (1, 0, 0, 1), \quad y = (1, -1, 0, 1), \quad z = (1, 0, 1, 1), \quad t = (1, 1, 1, 1).$$

1. Montrer que la famille (x, y, z, t) est une famille liée.
2. La famille (x, y, z) peut-elle être complétée en une base de $\mathbf{R}^4$?
3. Compléter la famille (x, y, z) en une base de $\mathbf{R}^4$.

- Exercice 28.12.** 1. Démontrer que, dans $\mathbf{R}[X]$, la famille de polynômes $(X^3 + 2X - 1, X + 1, X^3 - X^2)$ est une famille libre.
 2. Cette famille est-elle une base de $\mathbf{R}_3[X]$?
 3. La compléter en une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

- Exercice 28.13.** 1. Montrer que le triplet $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (2, 0, -1), (2, 1, 1))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
 2. Donner les coordonnées des vecteurs $(4, -1, 1)$ et $(1, 0, 0)$ dans cette base.

Exercice 28.14. Dans $\mathbf{R}_4[X]$, montrer que la famille $(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une base et déterminer les coordonnées de $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ dans cette base.

Exercice 28.15. On note F l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ vérifiant, pour tout réel x , $f(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{x^2}$.
 Montrer que F est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base.

Exercice 28.16. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $e_k = \sum_{\ell=0}^k X^\ell$.

- Démontrer que $(e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
- Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer les coordonnées du polynôme $P_k = X^k$ dans cette base.

Exercice 28.17. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ vérifiant $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. De plus, on note :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - x_k).$$

- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, vérifier que $P_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P_i(x_i) \neq 0$.
- En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbf{R}_n[X]$. Est-elle génératrice?

Sommes, sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 28.18. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$\begin{aligned} x &= (1, 2, 0, 1), & y &= (2, 1, 3, 1), & z &= (7, 8, 9, 5) \\ t &= (1, 2, 1, 0), & u &= (2, -1, 0, 1), & v &= (-1, 1, 1, 1), & w &= (1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Posons

$$A = \text{Vect}(x, y, z) \quad \text{et} \quad B = \text{Vect}(t, u, v, w).$$

- Déterminer la dimension et une base de A et de B .
- Déterminer la dimension et une base de $A + B$.
- Déterminer la dimension et une base de $A \cap B$.

Exercice 28.19. Montrer que $F = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 0))$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 28.20. Dans le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid x + iy - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(a + ib, a - ib, a + b) : (a, b) \in \mathbf{C}^2\}.$$

Déterminer une base de F , une base de G , une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.

Exercice 28.21. Déterminer un supplémentaire dans $\mathbf{R}^4$ de

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}.$$

Exercice 28.22. Montrer que l'ensemble

$$F = \{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid \tilde{P}(1) = \tilde{P}'(1) = \tilde{P}''(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_4[X]$ et en donner une base, sa dimension et un supplémentaire dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Exercice 28.23. On pose

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Prouver que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F \oplus G$.

Exercice 28.24. Déterminer un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(1) = 0\}$ dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Exercice 28.25. Déterminer un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Exercice 28.26. Dans $E = \mathbf{R}^4$, on considère $a = (1, 2, 0, 1)$, $b = (2, 1, 3, -1)$, $c = (4, 5, 3, 1)$ et $F = \text{Vect}(a, b, c)$.

1. Déterminer la dimension et une base de F . Déterminer un système d'équations de F .
2. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}$. Déterminer une base de G et sa dimension.
3. Montrer que $F \oplus G = E$. Donner la décomposition selon F et G du vecteur $s = (6, 10, 8, 2)$.

Exercice 28.27. Soit D l'ensemble des matrices diagonales de $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et F le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que D et F sont supplémentaires dans E .

Exercice 28.28. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbf{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 28.29. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Dans cette question $n = 3$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
 - (b) Montrer que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.
2. On revient au cas général.
 - (a) Donner sans justification une base et la dimensions de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.
 - (b) Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 28.30. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 3$.

Soit H et H' deux hyperplans de E c'est-à-dire des sous-espace vectoriels de E de dimension $n - 1$.

1. Montrer que $\dim(H + H') = n - 1$ si, et seulement si, $H = H'$
On suppose désormais que $H \neq H'$.
2. Montrer que $H + H' = E$.
3. Montrer que $\dim(H \cap H') = n - 2$.
4. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel D qui soit un supplémentaire dans E à H et à H' .

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 28.31. Notons $u_1 = (2, -1, -3)$, $u_2 = (-4, 1, 3)$, $u_3 = (-6, 3, 9)$ et $u_4 = (7, 2, 1)$. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?