TD 27 Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Exercice 27.1 . Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel dans lequel ils sont inclus ?

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid x = y\}$;

2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant y\}$;

3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid |x| = |y|\}$;

4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 0\}$;

5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 2y \quad \text{et} \quad x = 3z\}$;

6. $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid xyz = 0\}$;

7. $F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 3x + 1\}$;

8. $F_8 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \sin(x)\}$;

9. $F_9 = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{R} \mid f(1) = 0\}$;

10. $F_{10} = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{R} \mid f(3) \leqslant 0\}$;

11. $F_{11} = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{R} \mid f(3) = 2f(2)\}$;

12. $F_{12} = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant 5\}$;

13. $F_{13} = \left\{P \in \mathbf{K}[X] \,\middle|\, \widetilde{P}(0) = \widetilde{P'}(1) = 0\right\}$;

14. $F_{14} = \left\{P \in \mathbf{R}[X] \,\middle|\, X\widetilde{P}(1) + (X^2 - 4)\widetilde{P}(0) = 0\right\}$;

15. $F_{15} = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) = 5\}$;

16. $F_{16} = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{R} \mid f(1) = 0\}$;

17. $F_{17} = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{R} \mid f(0) = 1\}$;

18. $F_{18} = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f'(0) = f'(1)\}$;

19. $F_{19} = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbf{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$;

20. $F_{20} = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{R} \mid f \text{ est croissante}\}$;

21. $F_{21} = \{f \in \mathbf{R}^\mathbf{R} \mid f \text{ est paire}\}$;

22. $F_{22} = \{u \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \mid u \text{ converge}\}$;

23. $F_{23} = \{u \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \mid u \text{ est bornée}\}$;

24. $F_{24} = \left\{u \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \,\middle|\, \lim_{n \to +\infty} u_n = 2\right\}$;

25. $F_{25} = \left\{u \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \,\middle|\, \lim_{n \to +\infty} u_n = 0\right\}$;

26. $F_{26} = \{u \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$;

27. $F_{27} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^\top + 2M = I_n\}$;

28. $F_{28} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^\top + M = 0\}$;

29. $F_{29} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid M^2 = M\}$;

30. $F_{30} = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

Exercice 27.2. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Est-il vrai que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Est-il vrai que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ?
3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Sous-espaces engendrés

Exercice 27.3. **1.** Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(7, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 4)$ et $(-1, 2)$?

2. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$?
3. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(0, -2, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 2, 3)$ et $(3, -1, 2)$?
4. Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{3}, 1)$?
5. Dans $\mathbf{R}[X]$, le polynôme $P = 16X^3 - 7X^2 - 4 + 21X$ est-il combinaison linéaire des polynômes
$$A = 8X^3 - 5X^2 + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 + 7X - 2\ ?$$
6. Dans $\mathbf{R}^\mathbf{R}$, l'application $x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications sin et cos ?

7. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'application $x \longmapsto \cos(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications $\sin^2$ et $\cos^2$?
8. Dans l'espace vectoriel des suites réelles, la suite $(1)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle combinaison linéaire des suites

$$(n^2)_{n\in\mathbf{N}}, \quad (2^n)_{n\in\mathbf{N}}, \quad (2n-1)_{n\in\mathbf{N}} \ ?$$

Exercice 27.4. 1. Démontrer que les ensembles

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 3x + y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, 2x, -3x) \,:\, x \in \mathbf{R}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

2. Déterminer deux vecteurs u et v de $\mathbf{R}^3$ tels que $E = \operatorname{Vect}(u,v)$.
3. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'ensemble F, c'est-à-dire déterminer à quelles conditions sur les réels a, b et c le vecteur (a,b,c) est un élément de F.
4. Justifier que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et démontrer que $E \cap F = \{0\}$.
5. L'ensemble $E \cup F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 27.5. Soit $F = \left\{ (x,y,z,t,u) \in \mathbf{R}^5 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 4t + 5u &=& 0 \\ x + y - u &=& 0 \\ z + t - u &=& 0 \end{array} \right. \right\}$. Déterminer des vecteurs a et b de $\mathbf{R}^5$ de sorte que $F = \operatorname{Vect}(a,b)$.

Exercice 27.6. Considérons

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t &=& 0 \\ 2x - y + z &=& 0 \end{array} \right. \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - t &=& 0 \\ x + t &=& 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Déterminer les vecteurs f_1, f_2, g_1, g_2, e de $\mathbf{R}^4$ tels que $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$, $G = \operatorname{Vect}(g_1, g_2)$ et $F \cap G = \operatorname{Vect}(e)$.

Exercice 27.7. Soit $e = (1, -1, 2, -2)$, $f = (4, 3, 2, 1)$ et $F = \operatorname{Vect}(e, f)$. Déterminer à quelles conditions sur les réels a, b, c, d le vecteur (a, b, c, d) appartient à F (les conditions trouvées forment un système d'équations cartésiennes de F).

Exercice 27.8. Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(2, 4, 1)$ et $(0, -1, 3)$ (c'est-à-dire l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}((2,4,1),(0,-1,3))$).

Exercice 27.9. 1. Trouver deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que l'ensemble E des suites réelles vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$$

soit égal à $\operatorname{Vect}((a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}})$.

2. Écrire $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}) \,\middle|\, f'' - f' + f = 0 \right\}$ sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de fonctions.

Exercice 27.10. Soit $F = \left\{ P \in \mathbf{R}_3[X] \mid X\widetilde{P}(1) + (X^2 - 4)\widetilde{P}(0) = 0 \right\}$. Écrire F comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$.

Exercice 27.11. Dans $\mathbf{R}^3$, démontrer que $\operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1)) = \operatorname{Vect}((1,1,1),(-1,-1,1))$.

Exercice 27.12. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

Montrer que $\operatorname{Vect}(A,B) = \operatorname{Vect}(C,D)$.

Exercice 27.13. Soit E un espace vectoriel et X_1, X_2, X_3 trois vecteurs de E. Posons

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = X_1 + X_2, \quad Y_3 = 2X_1 + X_2 - X_3.$$

Montrer que :

$$\operatorname{Vect}(X_1, X_2, X_3) = \operatorname{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3).$$

Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 27.14. Soit $F = \operatorname{Vect}((1,0,1),(1,2,3),(1,4,5))$ et $G = \operatorname{Vect}((1,2,0),(1,1,1))$.

1. À quelles conditions le vecteur $u = (x,y,z)$ appartient-il à F ? à G ?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbf{R}^3$ tel que $F \cap G = \operatorname{Vect}(a)$.
3. Montrer que $F + G = \mathbf{R}^3$. Cette somme est-elle directe ?

Exercice 27.15. Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ et $G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x-y+z=0 \right\}$.

1. Donner une description de F et G comme sous-espaces vectoriels engendrés.
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Montrer qu'il est possible de trouver a de sorte que $(a,-a,0) \in F$ et $(x-a, y+a, z) \in G$. Que vaut $F+G$ (on pourra remarquer que $u = (a,-a,0) + (x-a, y+a, z)$).
3. F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 27.16. On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, ainsi que

$$F = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid AM = 0 \} \quad \text{et} \quad G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid BM = 0 \}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $A+B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

Exercice 27.17. Dans chacun des cas suivants, montrer que les espaces vectoriels F et G sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires (respectivement dans $\mathbf{R}^3$ pour (a) et dans $\mathbf{R}^4$ pour (b)) ?

(a) $F = \operatorname{Vect}((1,1,0))$ et $G = \operatorname{Vect}((1,0,3),(2,1,-1))$.

(b) $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x+2y+3z+4t=0 \right\}$ et $G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x+y=0 \text{ et } z=0 \text{ et } t=0 \right\}$.

Exercice 27.18. Dans $\mathbf{R}^n$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}\big(u\big)$ avec $u = (1,2,\dots,n)$ et le sous-ensemble $G = \{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \}$.

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^n$.

Exercice 27.19. Dans $\mathbf{R}[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \mathbf{R}_0[X]$ et $G = \{ (X-1)Q(X) \mid Q \in \mathbf{R}[X] \}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 27.20. On appelle I l'ensemble constitué des fonctions impaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et P celui des fonction paires. Montrer que ces sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 27.21. On considère les ensembles

$$F = \left\{ P \in \mathbf{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \}.$$

1. Déterminer des polynômes $P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{R}_2[X]$ tels que $F = \operatorname{Vect}(P_1, P_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(P_3)$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}_2[X]$?

Exercice 27.22. Les sous-espaces vectoriels $F = \operatorname{Vect}(\cos)$ et $G = \operatorname{Vect}(\sin)$ de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont-ils en somme directe ?

Exercice 27.23. Soit $F = \{ P \in \mathbf{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$, $G = \mathbf{C}_1[X]$ et $H = \{ P \in \mathbf{C}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0 \}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{C}[X]$. Montrer que c'est aussi le cas de G et H.

Exercice 27.24. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $\mathscr{C}_0$ l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0 et $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$ supplémentaires.