TD 26 — Séries numériques

Calcul de sommes

Exercice 26.1. Justifier que les séries suivantes sont convergentes et donner leur somme.

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$;
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4}{5^n}$;
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$;
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n}}$;
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{5^{n-1}}$;
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+3^n}{7^n}$;
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3^{n+1}}$;
8. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\mathrm{Arctan}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \mathrm{Arctan}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)$;
9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-2}2^n}{n!}$;
10. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3^{2n+1}}$;
11. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$;
12. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!}$.

Exercice 26.2. **1.** Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

2. En vous aidant d'une décomposition en éléments simples, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 26.3. **1.** Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right),$$

2. Calculer sa somme après avoir reconnu une série télescopique.

Exercice 26.4. **1.** Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1-(-1)^N x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Nature d'une série

Exercice 26.5. Introduisons la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $u_n \leqslant \mathrm{e}^{-n}$. En déduire la nature de la série, puis une majoration de sa somme.

Exercice 26.6. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série dont le terme général est :

1. $\dfrac{n+2}{n^3+1}$; **2.** $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; **3.** $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$; **4.** $\dfrac{n-1}{3^n}$;

5. $\dfrac{4n^2+5n}{5^n}$; **6.** $\dfrac{1}{\ln(n)}$; **7.** $\dfrac{2^n-n}{3^n}$; **8.** $\mathrm{e}^{-\sqrt{1+n}}$;

9. $\dfrac{1+n}{n^3(n+\ln n)}$; **10.** $\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; **11.** $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$; **12.** $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

13. $\dfrac{n^2}{n!}$; **14.** $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$; **15.** $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; **16.** $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$;

17. $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; **18.** $\dfrac{\cos n}{n^2+3n-2}$; **19.** $\cos\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$; **20.** $\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}-\sqrt{n}$.

Exercice 26.7. Dans chacun des cas suivants, déterminer, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$, la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$; **2.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{n^\alpha}\right)$; **3.** $u_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$.

Exercice 26.8. En utilisant une comparaison avec une intégrale, déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$.

Lien entre suite et série

Exercice 26.9. Soit $u_0 \in \mathbf{R}_+^\star$. On définit par récurrence la suite (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n}u_n$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante.
   (c) En déduire que u converge et déterminer sa limite.
2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Exercice 26.10. Introduisons la suite u de terme général

$$u_n = \frac{n!}{\mathrm{e}^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

1. Montrer que $1-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.
2. Montrer que les suites de termes généraux $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $-\dfrac{1}{12n^2}$ sont des suites équivalentes.
3. En déduire que la suite u converge.

Nouvelles techniques de convergence

Exercice 26.11. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série à termes positifs convergente.

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{1+a_n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}{a_n}^2$ sont convergentes.

Exercice 26.12 (*Séries alternées*). Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers 0.

1. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k\right| \leqslant a_{n+1}.$$

4. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge t-elle absolument ? Converge t-elle « simplement » ?

Exercice 26.13. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement plus grands que -1.

1. Montrer que si u est une suite de réels tous de même signe, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ sont de même nature.

2. Montrer que sans cette hypothèse, ce n'est plus nécessairement le cas. On pourra considérer la suite u de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 26.14. Soit f une fonction non nulle continue et positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. On considère la série de terme général
$$u_n = \int_0^1 f\left(t^n\right)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$u_n \geqslant \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire la nature de la série.

3. Application : déterminer la nature de la série de terme général
$$u_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 26.15 (*Règle de D'Alembert*). Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq 0$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+$ tel que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$.

1. Montrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

2. On suppose que $\ell < 1$. Posons $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$.

(a) Montrer que la suite $\left(\frac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^{n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang.

(b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.

3. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^4}{3^n}$ converge.

4. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$.